ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2017

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

16-MC-B4 Analyse par éléments finis

Il y a quatre (4) questions présentées sur trois pages.

Question 1 (25 points)

Les coordonnées x et y et les déplacements u_x et u_y aux coins d'un élément fini axisymétrique à 4 nœuds sont présentés à la Figure 1. Les propriétés du matériau sont $\boxed{E = 2000\ \text{MPa}}$ (module d'élasticité) et $\boxed{\nu = 0.3}$ (coefficient de Poisson).

En utilisant la matrice des fonctions de forme [N] d'un élément fini axisymétrique à 4 nœuds, calculer les déformations et les contraintes au point **P** situé au milieu de 1-4.

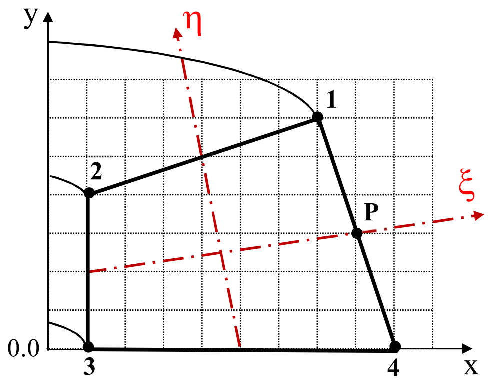

Figure 1

Noeuds	x (mm)	y (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)
1	70	60	0.05	0.07
2	10	40	0.0	0.01
3	10	0	0.0	0.0
4	90	0	0.02	0.0

Rappel:

Matrice des fonctions de forme :

$[N(\xi, \eta)] = [\ \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\ ]$

Question 2 (25 points)

La structure OBC est encastrée aux points O et C.

Une force verticale $\boxed{P = 5\ \text{kN}}$ est appliquée au point B (Figure 2).

Pour $\boxed{d = 46\ \text{mm}}$ (diamètre de la section), $\boxed{E = 200000\ \text{MPa}}$ (module d'élasticité du matériau) et un modèle de deux éléments finis poutre 2D,

a) développer les équations d'équilibre de chaque élément,

b) développer les équations d'assemblage réduites,

c) calculer les déplacements du point B.

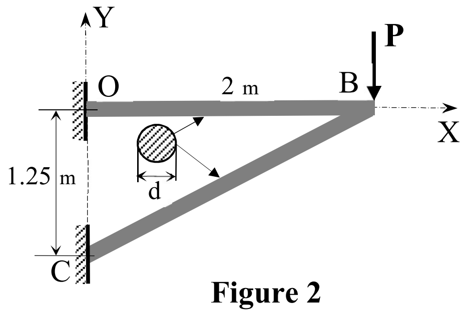

Figure 2

<u>Rappel</u>:

Équation d'équilibre matricielle d'un élément fini ij en poutre 2D :

$$\begin{bmatrix} K_5 & K_6 & -K_8 & -K_5 & -K_6 & -K_8 \\ K_6 & K_7 & K_9 & -K_6 & -K_7 & K_9 \\ -K_8 & K_9 & 2\cdot K_4 & K_8 & -K_9 & K_4 \\ -K_5 & -K_6 & K_8 & K_5 & K_6 & K_8 \\ -K_6 & -K_7 & -K_9 & K_6 & K_7 & -K_9 \\ -K_8 & K_9 & K_4 & K_8 & -K_9 & 2\cdot K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ \theta_i \\ u_{x,j} \\ u_{y,j} \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,i}^{ij} \\ f_{y,i}^{ij} \\ M_i^{ij} \\ f_{x,j}^{ij} \\ f_{y,j}^{ij} \\ M_j^{ij} \end{bmatrix},$$

Où $K_1 = \dfrac{A\cdot E}{L}$, $K_2 = \dfrac{12\cdot E\cdot I}{L^3}$, $K_3 = \dfrac{6\cdot E\cdot I}{L^2}$, $K_4 = \dfrac{2\cdot E\cdot I}{L}$, $K_5 = K_1 * c^2 + K_2 * s^2$, $K_6 = (K_1 - K_2) * s * c$

$K_7 = K_1 * s^2 + K_2 * c^2$, $K_8 = K_3 * s$ et $K_9 = K_3 * c$,

A est l'aire de section; I est le moment d'inertie de section; L est la longueur de l'élément ij; E est le module d'élasticité du matériau; φ est l'angle d'inclinaison de l'élément ij; $c = \cos\varphi$ et $s = \sin\varphi$.

Question 3 (25 points)

Les trois ressorts fixés aux points 1, 2 et 4 sont attachés à un corps rigide au point 3 (Figure 3).

Deux forces horizontales $\boxed{P = 2\ kN}$ sont appliquées au point 3.

Les constantes de rigidité des ressorts sont $\boxed{k_1 = k_2 = 500\ kN/m}$ et $\boxed{k_3 = 1000\ kN/m}$.

En modélisant en trois éléments finis du ressort, calculer les forces de réaction aux points 1, 2 et 4.

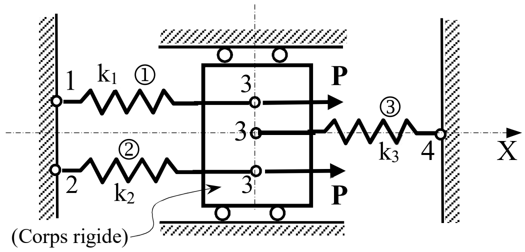

Figure 3

Rappel :

Équations d'équilibre d'un élément fini ressort ij : $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$

Où k est la constante de rigidité du ressort ij.

Question 4 (25 points)

Le treillis OBC à la figure 4 est supporté par les rotules aux points O et C.

Pour $\boxed{E = 20*10^{10}\ N/m^2}$ (module d'élasticité du matériau), $\boxed{A = 0.00018\ m^2}$ (section de la tige), $\boxed{\rho = 7800\ kg/m^3}$ (masse volumique) et en modélisant en deux éléments finis tige 2D,

a) développer la matrice de rigidité et la matrice de masse de chaque élément;

b) déterminer la plus basse fréquence naturelle du treillis.

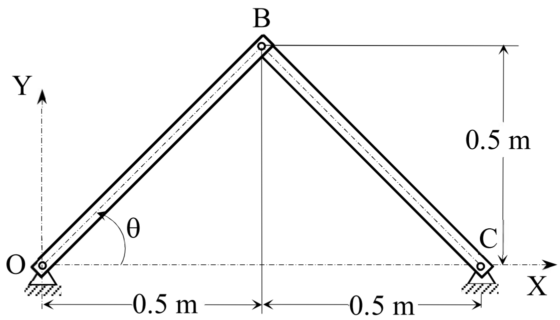

Figure 4

Rappel:

Matrice de rigidité d'un élément fini de la tige 2D : $K_{ij} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & s*c & -c^2 & -s*c \\ s*c & s^2 & -s*c & -s^2 \\ -c^2 & -s*c & c^2 & s*c \\ -s*c & -s^2 & s*c & s^2 \end{bmatrix}$

Matrice de masse d'un élément fini de la tige 2D : $M_{ij} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Où L est la longueur de l'élément ij; θ est l'angle d'inclinaison de l'élément ij; c = cosθ et s = sinθ.

Degrés de liberté d'un élément fini ij: $D_{ij} = \begin{bmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ u_{x,j} \\ u_{y,j} \end{bmatrix}$