ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2017

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

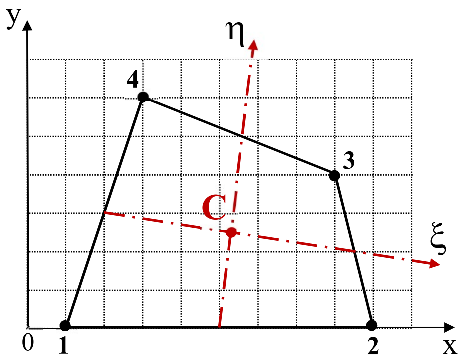
16-MC-B4 Méthode des éléments finis

Il y a quatre (4) questions présentées sur trois pages.

Question 1 (25 points)

Le tableau de la figure 1 présente les coordonnées x et y et les déplacement u_x et u_y aux quatre coins d'une pièce plane et mince dont les propriétés du matériau sont $\boxed{E = 2000 \text{ MPa}}$ (module d'élasticité) et $\boxed{\nu = 0.3}$ (coefficient de Poisson).

En utilisant la matrice des fonctions de forme $[N_{\xi\eta}]$ d'un élément fini quadrilatère de 4 nœuds, calculer les déformations normale et cisaillement et les contraintes au centre **C** de cet élément.



Noeuds	x (mm)	y (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)
1	100	0	0.075	0
2	180	0	0.100	0
3	170	40	0.050	0.050
4	120	60	0.100	0.025

Figure 1

Rappel :

$$[N_{\xi\eta}] = 0.25 * \begin{bmatrix} (1+\eta) & -(1+\eta) & -(1-\eta) & (1-\eta) \\ (1+\xi) & (1-\xi) & -(1-\xi) & -(1+\xi) \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne $[J] = [N_{\xi\eta}] \cdot [xy_{IJKL}]$

$$\text{Déformations : } \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot [N_{\xi\eta}] \cdot [u_x u_{yIJKL}]$$

Où $[xy_{IJKL}]$: Matrice des coordonnées des quatre nœuds de l'élément IJKL

$[u_x u_{yIJKL}]$: Matrice des déplacements u_x et u_y des quatre nœuds de l'élément IJKL

Question 2 (25 points)

Une poutre coudée ABC de diamètre $\boxed{d = 50 \text{ mm}}$ et de module d'élasticité du matériau $\boxed{E = 200000 \text{ MPa}}$ est encastrée aux points A et C.

Une force horizontale $\boxed{F = 20 \text{ kN}}$ et une force verticale $\boxed{Q = 5 \text{ kN}}$ sont appliquées au point B (Figure 2).

En modélisant en deux éléments finis de la poutre 2D, calculer :

a) les équations d'équilibre de chaque élément,

b) les équations d'assemblage réduites,

c) les déplacements du point B.

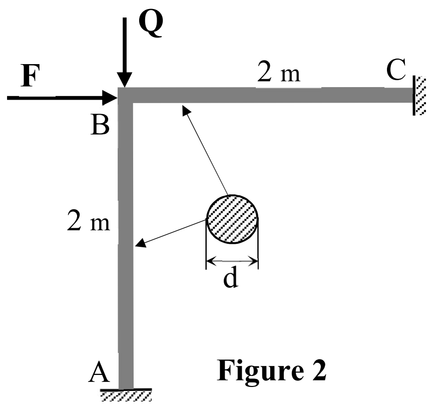


Figure 2

Rappel :

Équation d'équilibre d'un élément fini de la poutre 2D :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & K_3 & 0 & -K_2 & K_3 \\ 0 & K_3 & 2\cdot K_4 & 0 & -K_3 & K_4 \\ -K_1 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_3 & 0 & K_2 & -K_3 \\ 0 & K_3 & K_4 & 0 & -K_3 & 2\cdot K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ \theta_i \\ u_{x,j} \\ u_{y,j} \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,i}^{ij} \\ f_{y,i}^{ij} \\ M_i^{ij} \\ f_{x,j}^{ij} \\ f_{y,j}^{ij} \\ M_j^{ij} \end{bmatrix},$$

Où $K_1 = \frac{A \cdot E}{L}$, $K_2 = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$, $K_3 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$ et $K_4 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$

A = aire de la section, **L** = longueur de l'élément i-j, **I** = moment d'inertie de la section et **E** = module d'élasticité du matériau.

Question 3 (25 points)

Les trois ressorts fixés aux points 1, 3 et 4 sont attachés à une barre rigide au point 2 (Figure 3).

Une force horizontale $\boxed{P = 10\ \text{kN}}$ est appliquée au point 2.

La constante de rigidité des ressorts est $\boxed{k_1 = 120\ \text{kN/m}}$, $\boxed{k_2 = 150\ \text{kN/m}}$ et $\boxed{k_3 = 200\ \text{kN/m}}$ respectivement.

En modélisant en trois éléments finis du ressort, calculer les forces de réaction aux points 1, 3 et 4.

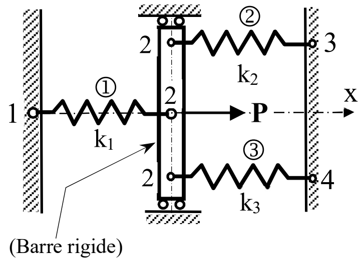


Figure 3

Rappel :

Équation d'équilibre d'un élément fini du ressort : $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$

Où k : Constante de rigidité du ressort ij.

Question 4 (25 points)

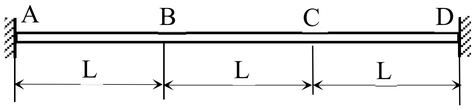


Figure 4

La barre ABCD est fixée aux extrémités A et D (Figure 4).

Pour $\boxed{L = 0.8\ \text{m}}$, $\boxed{E = 20*10^{10}\ \text{N/m}^2}$ (module d'élasticité), $\boxed{A = 0.005\ \text{m}^2}$ (section de la barre), $\boxed{\rho = 7800\ \text{kg/m}^3}$ (masse volumique), en modélisant la barre ABC en trois éléments finis de la barre en tension-compression, calculer :

a) la matrice de rigidité et de masse du système;

b) la plus basse valeur de la fréquence naturelle de la barre.

Rappel :

Matrice élémentaire de rigidité d'un élément fini de la barre : $K_{ij} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice élémentaire de masse d'un élément fini de la barre : $M_{ij} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$