ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION de Mai 2015

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-MC-B4 Analyse par éléments finis

Il y a cinq (5) questions présentées sur deux pages, chaque question vaut 20 points.

Question 1 (20 points)

Pour un élément de type poutre à 2 nœuds (voir Figure 1) la déflexion $u_y(x) = [N(x)][D]$, où $[D] = [u_{yi}\ \theta_i\ u_{yj}\ \theta_j]^T$ est le vecteur des degrés de liberté de l'élément poutre (*Note : $[..]^T$ signifie transposée de [..]*) et la fonction d'interpolation N(x) s'écrit:

$$N(x) = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3},\quad x - \frac{2*x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2},\quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3},\quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right]$$

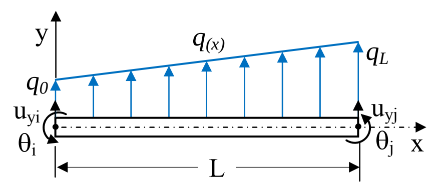

Figure 1

2pts a) Établir une expression de q(x) en fonction de x, L, q_0 et q_L.

10pts b) Avec N(x) tel que donné ci-dessus, déterminer les composantes du vecteur chargement $[f_q]$ aux nœuds dû à q(x) en fonction de L, q_0 et q_L.

8pts c) Déterminer l'expression de la matrice [B] telle que la déformation axiale $\varepsilon(x,y) = [B][D]$ où [B] est fonction de x, de L et de la position de la fibre y où la déformation est calculée.

Question 2 (20 points)

L'équation différentielle de la chaleur dans une tige de longueur L, avec génération interne de chaleur par unité de volume Q (W/m^3) est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{k} = 0$$

où k (W/m² °C) est le coefficient de conduction.

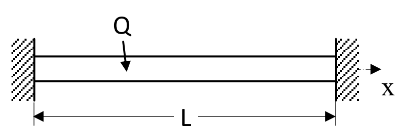

Figure 2

16pts a) Si les conditions frontières sont T(x=0) = T(x=L) = 0, déterminer par la méthode de Galerkin les constantes de la fonction approximée de $T = c_1 + c_2x + c_3x^2$.

4pts b) Comparer avec la solution exacte à L/2: $T(x) = \frac{1}{2}\frac{Q}{k}x(L - x)$

Question 3 (20 points)

Une barre à section variable est fixe à ses deux extrémités et est soumise à une variation de température ΔT (voir Figure 3). La barre est modèlisée en 4 éléments tiges de longueurs égales et de sections telles que $\boxed{A^{12} = 4A,\quad A^{23} = 3A,\quad A^{34} = 2A \text{ et } A^{45} = A}$.

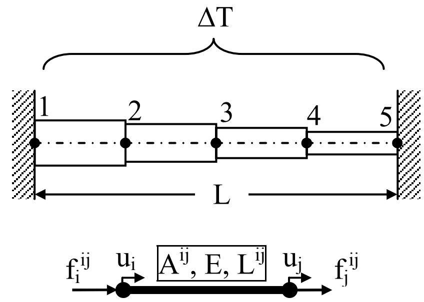

Figure 3

$\boxed{\text{8pts}}$ c) Étant donné $\frac{A^{ij}E}{L^{ij}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{ij} \\ f_j^{ij} \end{bmatrix} + A^{ij}E\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ les équations d'équilibre statique d'un élément tige, assembler les équations pour obtenir le système d'équations d'équilibre du système complet.

$\boxed{\text{7pts}}$ b) Appliquer les conditions frontières et résoudre pour u_2, u_3 et u_4 avec $\boxed{L = 1000\text{ mm}}$, $\boxed{A = 50\text{ mm}^2}$, $\boxed{E = 100\text{ kN/mm}^2}$, $\boxed{\alpha = 25\text{e-}6\text{ /°C}}$ et $\boxed{\Delta T = 40\text{ °C}}$.

$\boxed{\text{5pts}}$ c) Calculer la contrainte axiale dans l'élément 4-5.

Question 4 (20 points)

La solution en déplacement pour un élément fini à 4 nœuds en état plan de contraintes est donnée ci-dessous (Fig. 4) :

noeud	x (mm)	y (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)
1	40	40	0.09	0.11
2	0	30	0	0.05
3	0	0	0	0
4	50	0	0.03	0

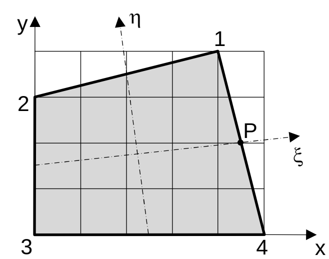

Figure 4

$\boxed{\text{12pts}}$ a) En utilisant les fonctions de forme [N] d'un élément plan à 4 nœuds, calculer les déformations au point P.

$\boxed{\text{9pts}}$ b) Calculer les contraintes au point P avec $\boxed{E = 70000\text{ MPa}}$ et $\boxed{\nu = 0.32}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{xi} & u_{yi} \\ u_{xj} & u_{yj} \\ u_{xk} & u_{yk} \\ u_{xl} & u_{yl} \end{bmatrix}; \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Question 5 (20 points)

La membrure de longueur 1.5L montrée à la Figure 5 est encastrée en x=1.5L et simplement supportée en x=0 et x=L. Avec $\boxed{L = 2\text{ m}}$, $\boxed{E = 7.2\text{e}10\text{ Pa}}$, $\boxed{\rho = 2520\text{ kg/m}^3}$, et une section rectangulaire $\boxed{h = 0.02\text{ m de haut par } 0.05\text{ m de profondeur}}$, discrétiser la membrure en deux éléments poutres et :

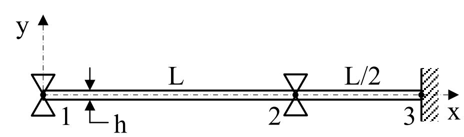

Figure 5

$\boxed{\text{10pts}}$ a) Procéder à l'assemblage des équations d'équilibre et appliquer les conditions frontières.

$\boxed{\text{7pts}}$ b) Calculer les deux premières fréquences naturelles de la membrure (mode 1 et mode 2)

$\boxed{\text{3pts}}$ c) Dessiner le mode 1

Rappel: Élément poutre à 2 nœuds ⇒ matrice de rigidité $[K_{ij}]$, matrice masse $[M_{ij}]$, et vecteur des degrés de liberté $[D_{ij}]$ avec uy et θ les degrés de liberté d'un nœud. Pour l'élément ij, E est le module d'élasticité, L_{ij} est la longueur de l'élément, A_{ij} est la surface de la section droite, I_{ij} est le second moment quadratique de la section et ρ_{ij} est la masse volumique.

$$[K_{ij}] = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & -12 & 6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 \\ -12 & -6L_{ij} & 12 & -6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 4L_{ij}^2 \end{bmatrix}; \quad [M_{ij}] = \frac{\rho_{ij}A_{ij}L_{ij}}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L_{ij} & 54 & -13L_{ij} \\ 22L_{ij} & 4L_{ij}^2 & 13L_{ij} & -3L_{ij}^2 \\ 54 & 13L_{ij} & 156 & -22L_{ij} \\ -13L_{ij} & -3L_{ij}^2 & -22L_{ij} & 4L_{ij}^2 \end{bmatrix}; \quad [D_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{bmatrix};$$
