ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2019

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

16-MC-B4 Analyse par éléments finis

Il y a quatre (4) questions présentées sur trois pages.

Question 1 (25 points)

Les coordonnées x et y et les déplacements u_x et u_y aux coins d'un élément fini axisymétrique à 4 nœuds sont présentés à la Figure 1, la pièce étant à la température ambiante. Les propriétés du matériau sont $\boxed{E = 10000 \text{ MPa}}$ (module d'élasticité) et $\boxed{\nu = 0.3}$ (coefficient de Poisson).

En utilisant la matrice des fonctions de forme [N] d'un élément fini axisymétrique à 4 nœuds, calculer les déformations et les contraintes au point **P** situé au milieu de 2-3.

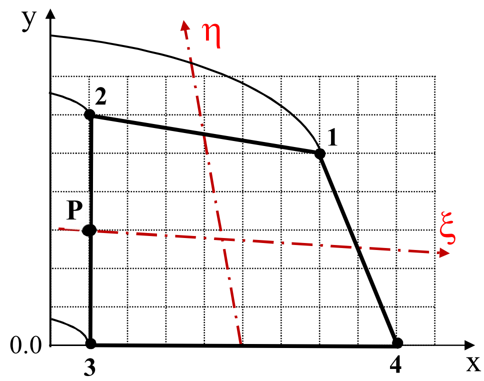


Figure 1

Noeuds	x (mm)	y (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)
1	70	50	0.04	0.03
2	10	60	0.0	0.02
3	10	0	0.0	0.0
4	90	0	0.02	0.0

<u>Rappel</u>:

Matrice des fonctions de forme :

$[N(\xi, \eta)] = [\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)]$

Où ξ et η sont les coordonnées normalisées variant entre −1 et +1 dans un quadrilatère IJKL telles qu'un paramètre d'état **f** en un point de coordonnées (ξ, η) dans cet élément soit donné par la fonction d'interpolation bilinéaire suivante :

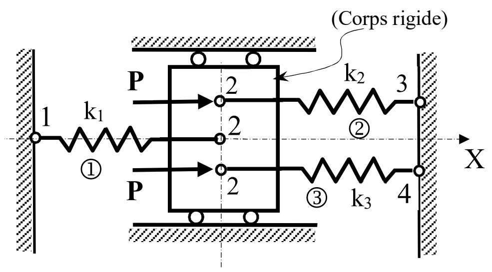
$\mathbf{f} = [N]*[f_I \ f_J \ f_K \ f_L]$ écrit en vecteur colonne,

f pouvant être x, y, T (température), u_x ou u_y.

Question 2 (25 points)

Les trois ressorts fixés aux points 1, 3 et 4 sont attachés à un corps rigide au point 2 (Figure 2). Les constantes de rigidité des ressorts sont $\boxed{k_1 = 1000 \text{ kN/m}}$ et $\boxed{k_2 = k_3 = 500 \text{ kN/m}}$.

Figure 2



Deux forces horizontales $\boxed{P = 2 \text{ kN}}$ sont appliquées au point 2.

En modélisant en trois éléments finis du ressort, calculer les forces de réaction aux points 1, 3 et 4.

Rappel :

Équations d'équilibre d'un élément fini ressort ij : $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix}$

Où k est la constante de rigidité du ressort ij.

Question 3 (25 points)

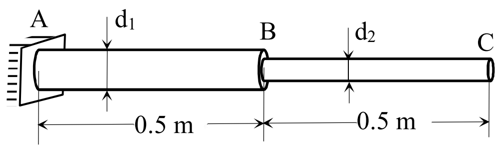


Figure 3

L'arbre ABC en acier est encastré au point A (Figure 3).

Les diamètres de l'arbre sont les suivantes : $\boxed{d_1 = 0.038 \text{ m}}$ pour AB et $\boxed{d_2 = 0.024 \text{ m}}$ pour BC.

Les propriétés de l'acier sont $\boxed{G = 7.8*10^{10} \text{ N/m}^2}$ (module de rigidité) et $\boxed{\rho = 7800 \text{ kg/m}^3}$ (masse volumique).

En modélisant l'arbre ABC en deux éléments finis en torsion, calculer :

a) les matrices d'assemblage de rigidité et de masse de l'arbre;

b) la plus basse fréquence naturelle (mode 1) en vibration de torsion.

Rappel : Élément torsion à 2 nœuds ⇒ matrice de rigidité $[K_{ij}]$, matrice masse $[M_{ij}]$ et vecteur des degrés de liberté $[D_{ij}]$ avec θ le degré de liberté en rotation d'un nœud. Pour l'élément ij, G est le module de rigidité, L_{ij} est la longueur de l'élément, J_{ij} est le moment d'inertie polaire de la section, I_{ij} est le second moment quadratique de la section et ρ_{ij} est la masse volumique.

$$[K_{ij}] = \frac{G \cdot J_{ij}}{L_{ij}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; [M_{ij}] = \frac{\rho \cdot I_{ij} \cdot L_{ij}}{12} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } [D_{ij}] = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Question 4 (25 points)

Les tiges du treillis ABC (ferme) à la figure 4 sont toutes de même matériau $\boxed{E = 2*10^5 \text{ MPa}}$.

Les sections des tiges sont les suivantes : $\boxed{120 \text{ mm}^2}$ pour AB et $\boxed{480 \text{ mm}^2}$ pour BC.

Les joints A et C sont bloqués dans les deux directions et une force horizontale $\boxed{P = 8 \text{ kN}}$ est appliquée au joint B.

En modélisant le treillis ABC en deux éléments finis tige 2D,

a) développer les équations d'équilibre de chaque élément,

b) développer les équations d'assemblage réduites,

c) calculer les déplacements du point B.

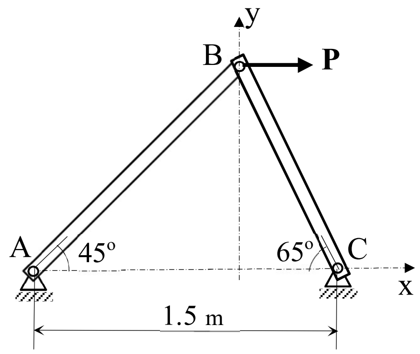


Figure 4

Rappel:

Équation d'équilibre matricielle d'un élément fini ij en tige 2D :

$$\frac{A*E}{L}\begin{bmatrix} c^2 & s*c & -c^2 & -s*c \\ s*c & s^2 & -s*c & -s^2 \\ -c^2 & -s*c & c^2 & s*c \\ -s*c & -s^2 & s*c & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ u_{x,j} \\ u_{y,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,i}^{ij} \\ f_{y,i}^{ij} \\ f_{x,j}^{ij} \\ f_{y,j}^{ij} \end{bmatrix},$$

A est l'aire de section; L est la longueur de l'élément ij; E est le module d'élasticité du matériau; φ est l'angle d'inclinaison de l'élément ij; c = cosφ et s = sinφ.