ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2016

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

14-MC-B4 Analyse par éléments finis

Il y a quatre (4) questions présentées sur deux pages.

<u>Question 1</u> (25 points)

Une barre OABC de section circulaire variable est fixée au point O et soumise à des charges de $\boxed{8\ \text{kN}}$ vers le bas au point C et de $\boxed{2*10\ \text{kN}}$ vers le haut au point A (Figure 1).

Pour $\boxed{L = 400\ \text{mm}}$, $\boxed{E_{acier} = 2*10^5\ \text{N/mm}^2}$ (module d'élasticité de l'acier) et $\boxed{E_{aluminium} = 7*10^4\ \text{N/mm}^2}$ (module d'élasticité de l'aluminium), en modélisant la barre OABC en trois éléments finis de la barre en tension-compression et en négligeant le poids de la barre, montrer en détail les équations de rigidité de chaque élément, celles d'assemblage et calculer les déplacements aux nœuds et les contraintes normales dans chaque section de la barre.

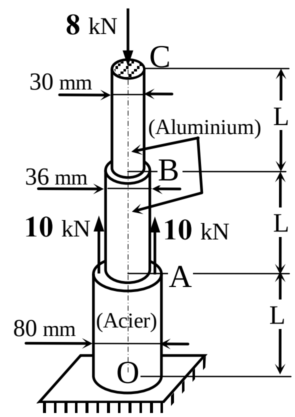

Figure 1

<u>Question 2</u> (20 points)

À la Figure 2, les résultats de la température de la méthode des éléments finis sont présentés aux coins d'un élément fini quadrilatère de 4 nœuds.

a) En utilisant la matrice des fonctions de forme [N] d'un élément fini quadrilatère de 4 nœuds, calculer la température au point **P** situé au centre du quart supérieur droit dans le système de coordonnées normalisées ξ, η de l'élément, tel qu'illustré.

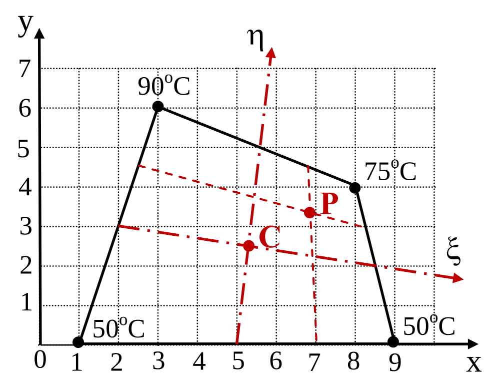

Figure 2

b) Calculer le gradient de température [ε] au centre C de cet élément.

Rappel : $[\varepsilon] = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} & \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \cdot [T_i \quad T_j \quad T_k \quad T_l\,]^T$

où [J] est la matrice jacobéenne et $[\ldots]^T$ signifie la matrice transposée de [...]

<u>Question 3</u> (25 points)

L'arbre ABCD est encastré aux deux bouts A et D, rigidement joint en C et soumis à un moment de torsion $\boxed{T_B = 250\ \text{Nm}}$ à la section B. La partie ABC de diamètre $\boxed{d_{ABC} = 40\ \text{mm}}$ est en acier de $\boxed{G_{acier} = 80\ \text{GPa}}$ (module de rigidité). La partie CD de diamètre $\boxed{d_{CD} = 25\ \text{mm}}$ est en aluminium de $\boxed{G_{aluminium} = 28\ \text{GPa}}$ (module de rigidité).

En modélisant l'arbre ABCD en trois éléments finis en torsion, construire les équations de rigidité d'assemblage, résoudre pour les angles de rotations aux points B et C et calculer la contrainte de cisaillement maximale dans chaque matériau de l'arbre.

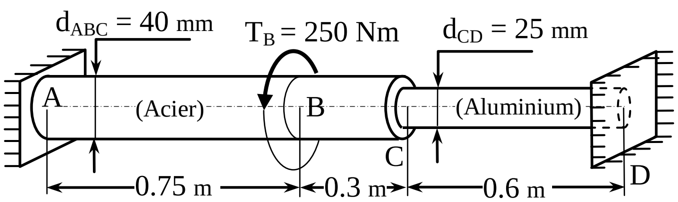

Figure 3

<u>Question 4</u> (30 points)

La barre ABC fixe au bout A et le ressort CD fixe au bout D sont joints ensemble en C (Figure 4). La constante de rigidité du ressort est $\boxed{k_s = 500\ \text{N/m}}$ et la masse du ressort est négligeable.

Pour $\boxed{L = 1\ \text{m}}$, $\boxed{E = 20*10^{10}\ \text{N/m}^2}$ (module d'élasticité de la barre), $\boxed{A = 0.005\ \text{m}^2}$ (section de la barre), $\boxed{\rho = 7800\ \text{kg/m}^3}$ (masse volumique de la barre), en modélisant l'assemblage en trois éléments finis en tension-compression axiale, calculer :

a) la matrice de rigidité et celle de masse du système;

b) la plus basse fréquence naturelle (mode 1) en vibration axiale.

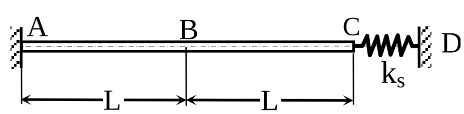

Figure 4

<u>Rappel</u>:

Matrice élémentaire de rigidité d'un élément fini barre : $K_{ij} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice élémentaire de masse d'un élément fini barre : $M_{ij} = \frac{\rho \cdot A \cdot L}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$