ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2021

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l’examen : 3 heures

16-EL-A2 SYSTÈMES ET COMMANDE

Question 1 (5% + 10% = 15%)

Soit un système dynamique représenté par la fonction de transfert de la forme suivante :

$$G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(s+1)} \tag{1}$$

et un contrôleur PI définit par :

$$G_C(s) = K\left(1+\frac{a}{s}\right) \tag{2}$$

avec K le gain proportionnel et Ka le gain intégral. La figure 1 montre le branchement de ces deux éléments pour former un système en boucle fermée.

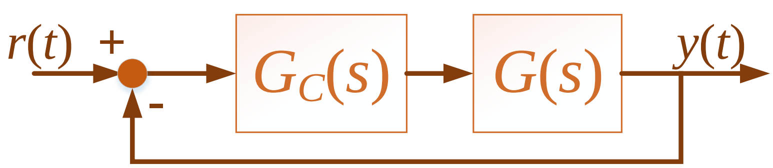

Figure 1: Système en boucle fermée avec commande $G_C(s)$ (Question #1)

a) Calculer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système.

b) Construire le tableau de Routh-Hurwitz de ce système et déduire les plages de K et a qui assurent que le système en boucle fermée est stable.

Question 2 (7 % + 7% + 2.5% + 3 % + 2.5 % + 5% + 5% + lieu des racines : 8% = 40%)

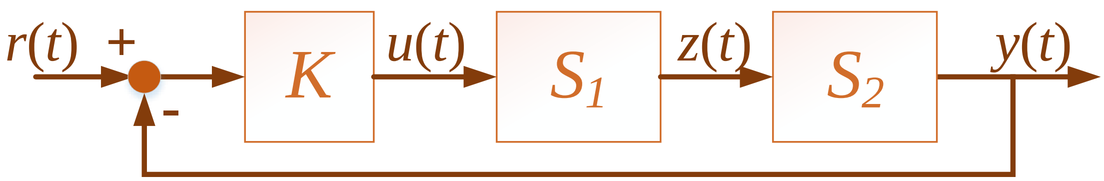

Figure 2: Schéma bloc pour la question 2

Il faut tracer, sur une pleine page, le lieu des racines d'un asservissement (montré en Figure 2), mais au préalable il faut obtenir la **fonction de transfert en boucle ouverte**.

a) Le sous système S_1 est représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \begin{bmatrix} -6 & -2.25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.125 \end{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\end{aligned} \tag{3}$$

Obtenir la fonction de transfert $G_1(s) = Z(s)/U(s)$ du sous-système S_1, considérant que Z(s) et U(s) représentent respectivement les transformée de Laplace de z(t) et u(t).

b) Le sous système S_2 est représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}z(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\mathbf{x}_2(t)\end{aligned} \tag{4}$$

Obtenir la fonction de transfert $G_2(s) = Y(s)/Z(s)$ du sous-système S_2, considérant que Z(s) et Y(s) représentent respectivement les transformée de Laplace de z(t) et y(t).

c) Obtenir la fonction de transfert en boucle ouverte du système montré en Figure 2. Cette fonction de transfert sera utilisée pour la suite.

Tracez le lieu des racines de la fonction de transfert en boucle ouverte obtenue en c). Pour l'obtenir, vous aurez **probablement** besoin de calculer :

d) La coordonnée du point d'intersection des asymptotes, ainsi que l'angle de ces asymptotes par rapport à l'axe réel;
e) L'angle de départ et d'arrivée des pôles et zéros complexes;

f) Les coordonnées des points de débranchement/raccordement des branches avec l'axe des réels;
g) Pour quelle plage de gain K le système sera-t-il stable en boucle fermée, avec une rétroaction unitaire? Pour la valeur de gain critique, quelle sera la position des pôles du système en boucle fermée, toujours avec un retour unitaire ?
h) **Faire le tracé du lieu des racines**.

Question 3 (3% + 3% + 3% + 2% + 2% + 6% + 6%= 25%)

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s^2+s+2)} \tag{5}$$

Le système est monté en série avec une commande proportionnelle K, tel que montré en Figure 3.

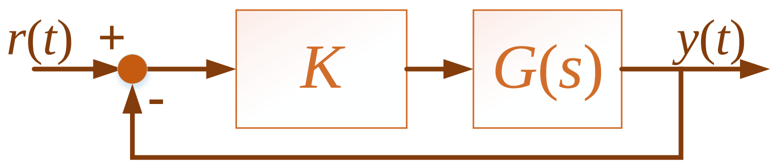

Figure 3: Système en boucle fermée avec commande *K* (Question #3)

a) Calculer l'erreur en régime permanent de ce système suite à une entrée unitaire de type échelon.
b) Calculer l'erreur en régime permanent de ce système suite à une entrée unitaire de type rampe.
c) Quelle valeur de gain K assure d'avoir une erreur en régime permanent (pour les deux types d'entrées) inférieure à 0.1.
d) Quelle est la pente du diagramme de Bode de G(s) aux hautes fréquences ?
e) Quelle est la phase de la fonction de transfert G(s) aux hautes fréquences ?
f) Quelle est la marge de gain de G(s) ?
g) Quelle est la marge de phase de G(s) ?

Indices pour f) et g) : les croisements du 0 dB et du -180° se produisent entre 1 et 2.5 rad/s.

Question 4 (5% + 2.5% + 12.5% = 20%)

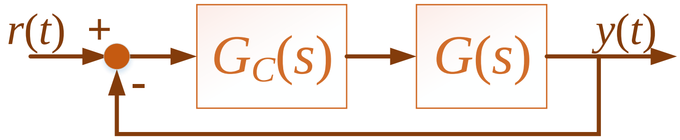

Figure 4: Schéma bloc du système de la question #5

Soit le système de commande montré en figure 4 et ayant la fonction de transfert G(s) suivante:

$$G(s) = \frac{40}{(s+8)^2} \tag{6}$$

a) En considérant un compensateur proportionnel intégral définit par $G_C(s) = K_C(1 + 10/s)$, calculer le gain K_C qui assure d'avoir un dépassement de 5% de la réponse transitoire. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $40\left(1+10/s\right)/\left(s+8\right)^2$ est montré en Figure 5 pour vous aider dans la conception. Détailler clairement chaque étape de la démarche de la conception.

b) Quelle est la constante d'erreur de vitesse correspondante au compensateur conçu en a) ?

c) En considérant maintenant que l'on ajoute en série avec $G_C(s)$ un compensateur par retard de phase (lag compensation), concevoir ce compensateur pour assurer un dépassement de 5% et une constante d'erreur de vitesse 5 fois plus élevée que celle obtenue en b) ? Détailler clairement chaque étape de la démarche de la conception.

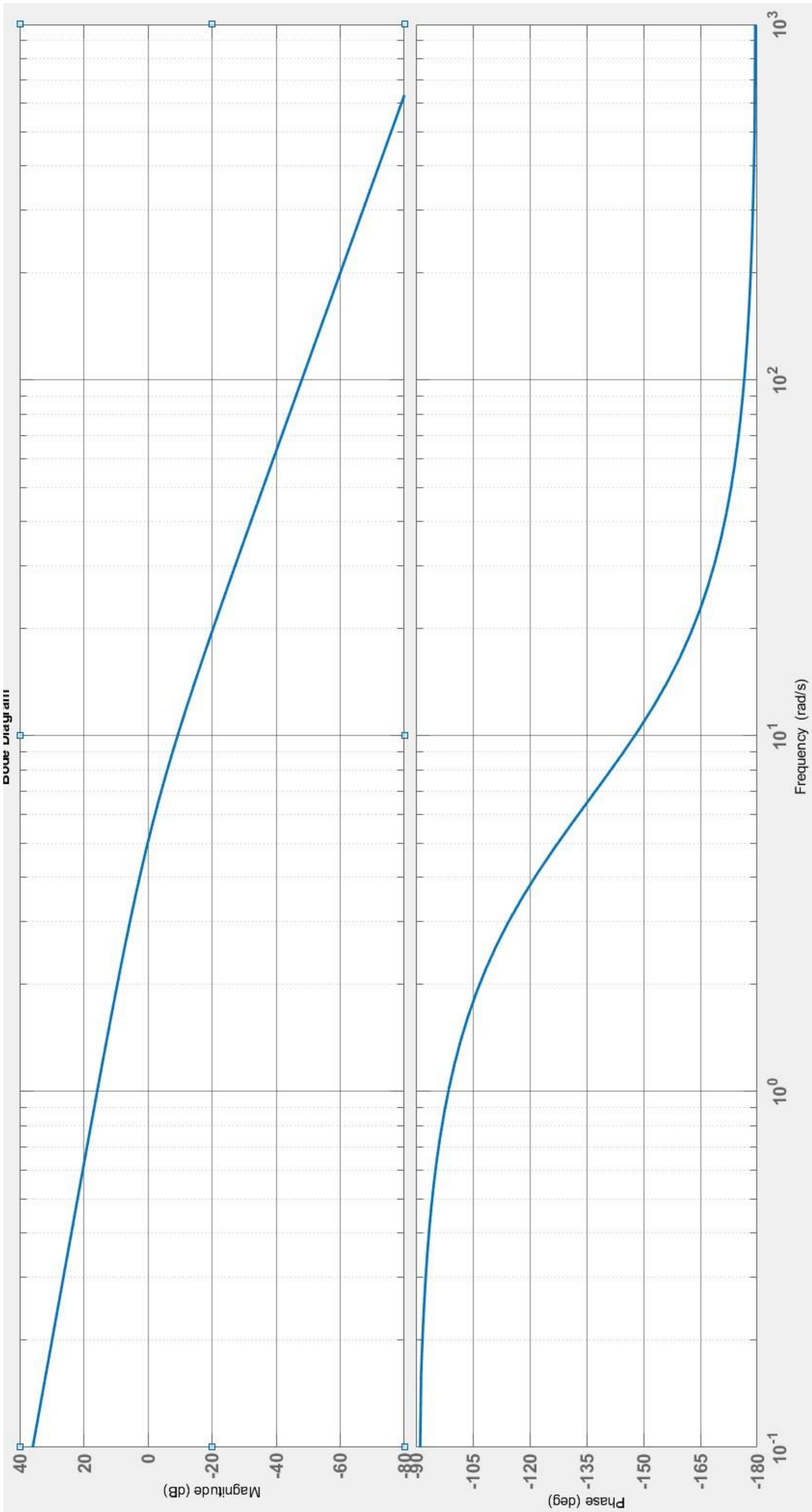

Figure 5: Diagramme de Bode de $40(1+10/s)/(s+8)^2$ **(question #4)**