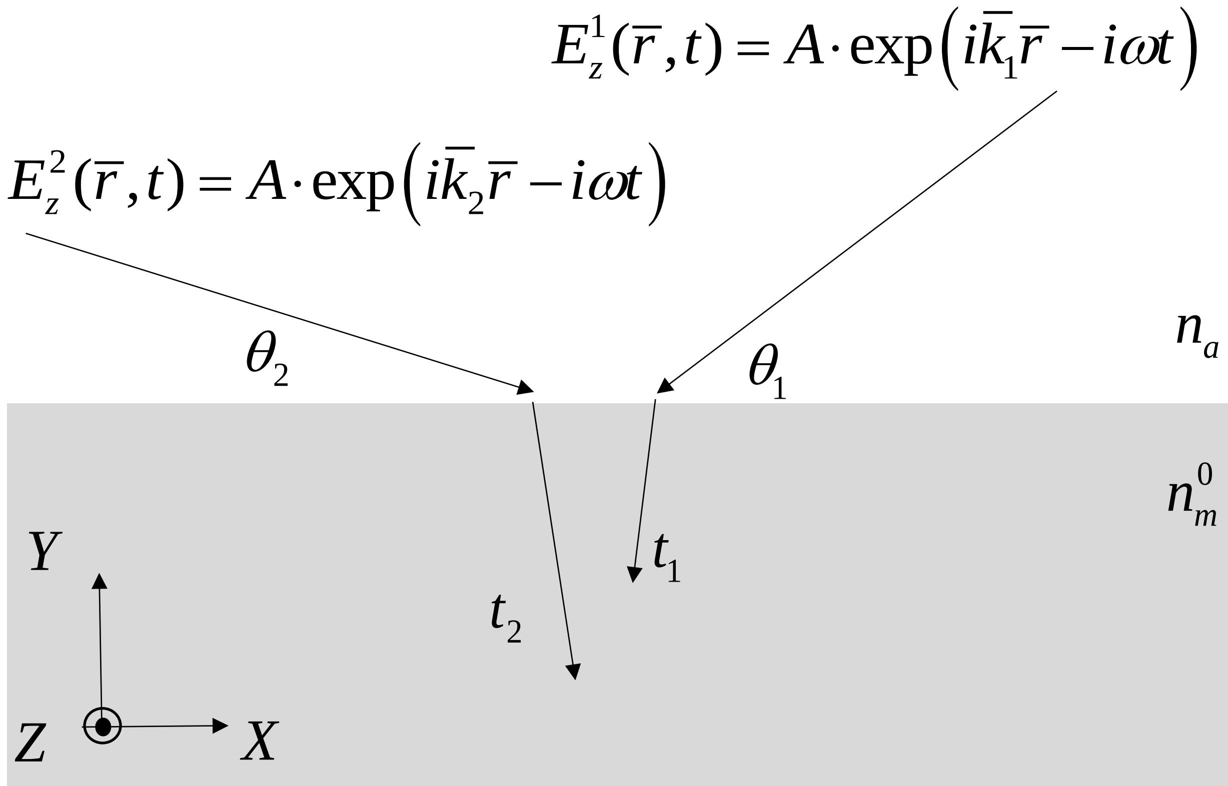
ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2016

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A7 OPTIQUE

Problème 1 (25 points). Écriture d'un réseau de Bragg dans un matériau photosensible.



Deux ondes planes de mêmes amplitudes A et de mêmes fréquences angulaires ω sont incidentes sur une surface entre l'air et un matériau photosensible semi-infini (voir la figure). L'indice de réfraction de l'air est n_a, tandis que celui du matériau est n_m^0. Les deux ondes sont polarisées le long de l'axe Z, parallèlement à l'interface entre l'air et le matériau. Les vecteurs d'ondes des deux ondes sont confinés sur le plan XY. Les deux ondes incidentes sont partiellement transmises à l'intérieur du matériau photosensible avec les coefficients de transmission (en amplitude) donnés par t_1 et t_2. À l'intérieur du matériau, au voisinage immédiat de l'interface avec l'air ($y=0$), un patron périodique de la distribution d'intensité du champ électrique $\mathrm{Re}\left(E_{tot}(x,t)\right)^2$ est formé à cause de l'interférence entre les deux ondes planes. Par conséquent, près de l'interface, l'indice de réfraction du matériau photosensible est légèrement modulé selon la formule suivante :

$$n_m = n_m^0 + \alpha\cdot I\left(x\right)$$
$$I\left(x\right) = \left\langle \mathrm{Re}\left(E_{tot}(x,t)\right)^2 \right\rangle_t$$

où E_{tot} est la valeur du champ électrique total sur l'interface (représentation complexe), $\mathrm{Re}(\ldots)$ indique la partie réelle, tandis que $\langle \ldots \rangle_t$ indique la valeur moyenne par rapport au temps. Répondez aux questions suivantes :

a) (5 points). Trouvez la distribution de champ électrique total $E_{tot}(x,t)$ (représentation complexe) à l'interface entre l'air et le matériau photosensible.

b) (10 points) Trouvez la moyenne temporelle de la distribution d'intensité du champ électrique total $I(x) = \left\langle \mathrm{Re}\left(E_{tot}(x,t)\right)^2 \right\rangle_t$ à l'interface entre l'air et le matériau photosensible.

Indice :

$$\left\langle \left[\cos\left(a+\omega t\right)\right]^2 \right\rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \cos\left(a+\omega t\right) \right\rangle_t = 0$$

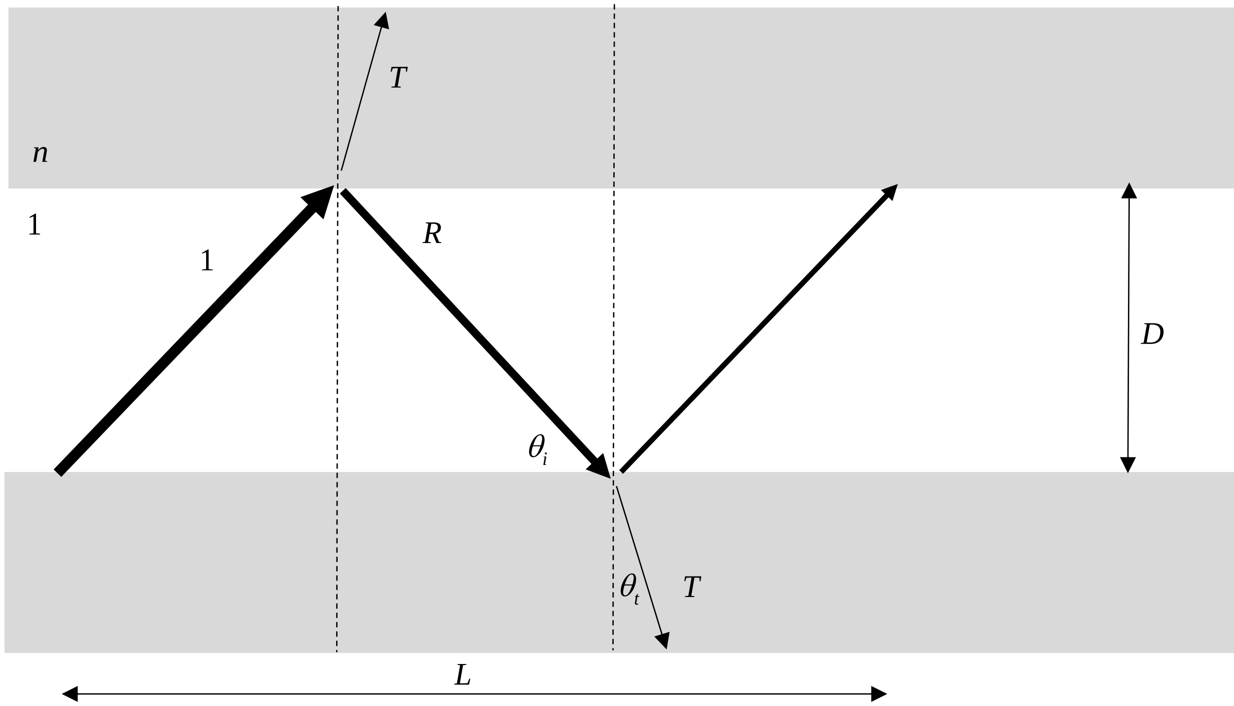
$$2\cos\left(a+\omega t\right)\cos\left(b+\omega t\right) = \cos\left(a-b\right) + \cos\left(a+b+2\omega t\right)$$

c) (5 points). Trouvez la période du patron périodique de la distribution de l'indice de réfraction du matériau photosensible. Cette période détermine la période du réseau de Bragg écrit.

d) (5 points). Trouvez le contraste du réseau de Bragg écrit défini comme :

$$C = \frac{\max(n_m) - \min(n_m)}{\max(n_m) + \min(n_m)}$$

Problème 2 (25 Points). Guide d'onde creuse.



Considérons un guide d'onde creux composé de deux plaques diélectriques semi-infinies d'indice de réfraction n qui sont positionnées aux deux côtés opposés d'un cœur vide d'indice de réfraction 1. Supposons que la taille D du cœur est considérablement plus grande que la longueur d'onde de la lumière λ guidée. Le guidage par un tel guide d'onde creux peut être expliqué par les réflexions consécutives de la lumière sur l'interface entre le cœur et les régions de gaine diélectriques. En particulier, considérons la lumière guidée comme un rayon incident sur l'interface cœur/gaine avec l'angle d'incidence θ_i. Chaque fois qu'un rayon arrive sur l'interface cœur/gaine, une partie R du rayon (en intensité) est réfléchie dans le cœur, tandis qu'une partie $T = 1 - R$ est perdue à cause de la transmission partielle dans la région de la gaine diélectrique. Dans ce qui suit, on cherche les propriétés optiques du guide d'onde creux :

a) (5 points). Trouvez le nombre total de réflexions de la lumière sur les interfaces cœur/gaine après propagation sur une distance L dans le cœur vide. Présentez votre réponse en fonction des paramètres D, L et θ_i.
b) (5 points). En supposant qu'après chaque réflexion, une partie T de l'intensité de la lumière est perdue, trouvez l'expression pour l'intensité de la lumière restante dans le cœur $I(L)$ en fonction de la longueur de propagation L.
c) (5 points). En supposant que la perte par réflexion est faible $T \ll 1$, présentez le résultat trouvé en b) sous la forme exponentielle suivante $I(L) = I(0)\exp(-L/L_0)$, et trouvez

l'expression en fonction de D, T, θ_i pour une longueur caractéristique L_0 de propagation dans le guide d'onde creux.

d) (5 points). En supposant que la lumière est polarisée parallèlement à l'interface cœur/gaine (polarisation s), utilisez les coefficients de Fresnel pour calculer la perte par réflexion T en fonction de l'angle d'incidence θ_i. En particulier, en supposant que le cœur est large ($D >> \lambda$) et que l'angle d'incidence est rasant ($\theta_i \sim \lambda/D << 1$), trouvez une expression pour T en fonction de l'angle d'incidence θ_i et de l'indice de réfraction de la gaine n. Garder seulement les termes linéaires en θ_i.

Indice :

Coefficients de Fresnel (polarisation s):

$$r = \frac{\sin(\theta_i) - n \cdot \sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i) + n \cdot \sin(\theta_t)} \underset{\theta_i << 1}{\Rightarrow} r \approx -1 + \frac{2\theta_i}{n \cdot \sin(\theta_t)}$$

Loi de Snell:

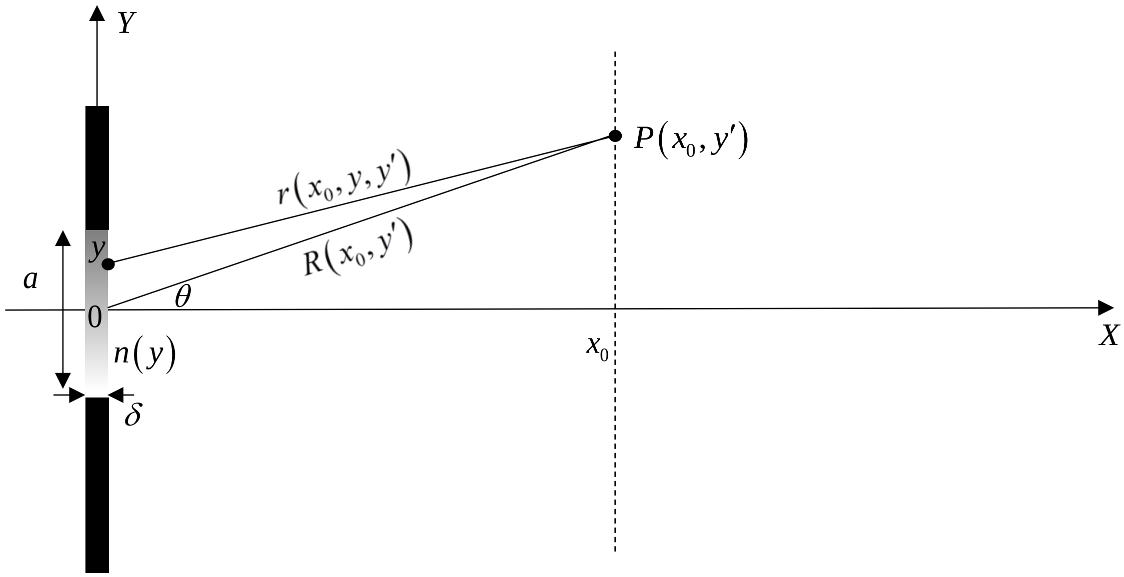
$$\cos(\theta_i) = n \cdot \cos(\theta_t) \underset{\theta_i << 1}{\Rightarrow} \cos(\theta_t) \approx 1/n ; \sin(\theta_t) \approx \sqrt{n^2 - 1}/n$$

Conservation d'énergie:

$$T = 1 - r^2$$

e) (5 points). En utilisant l'expression pour T trouvée en d) et en supposant que $\theta_i = \lambda/D$, trouvez l'expression pour une longueur caractéristique L_0 de propagation dans un guide d'onde creux en fonction de D, λ et n.

Problème 3 (25 points). Diffraction sur une fente remplie de matériau non homogène.



Soit une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ qui frappe une fente de dimension finie a dans un écran perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde incidente. L'onde est perturbée par l'écran et, en passant par la fente, elle diffracte, c'est-à-dire qu'il y a dispersion angulaire de l'onde. Afin de caractériser cette dispersion angulaire, on propose d'utiliser le principe de Huygens selon lequel l'onde plane se propage de proche en proche. Chaque élément de ligne atteint par une onde se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes circulaires dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément. Les ondelettes issues de chaque point de l'ouverture interfèrent entre elles et la solution du problème de diffraction consiste essentiellement à calculer la somme des amplitudes des ondelettes. De plus, supposons que dans la fente, il y a une plaque d'épaisseur δ de matériau non homogène avec un indice de réfraction qui varie selon $n(y) = n_0 + \Delta n \dfrac{y + a/2}{a}$. Répondez aux questions suivantes :

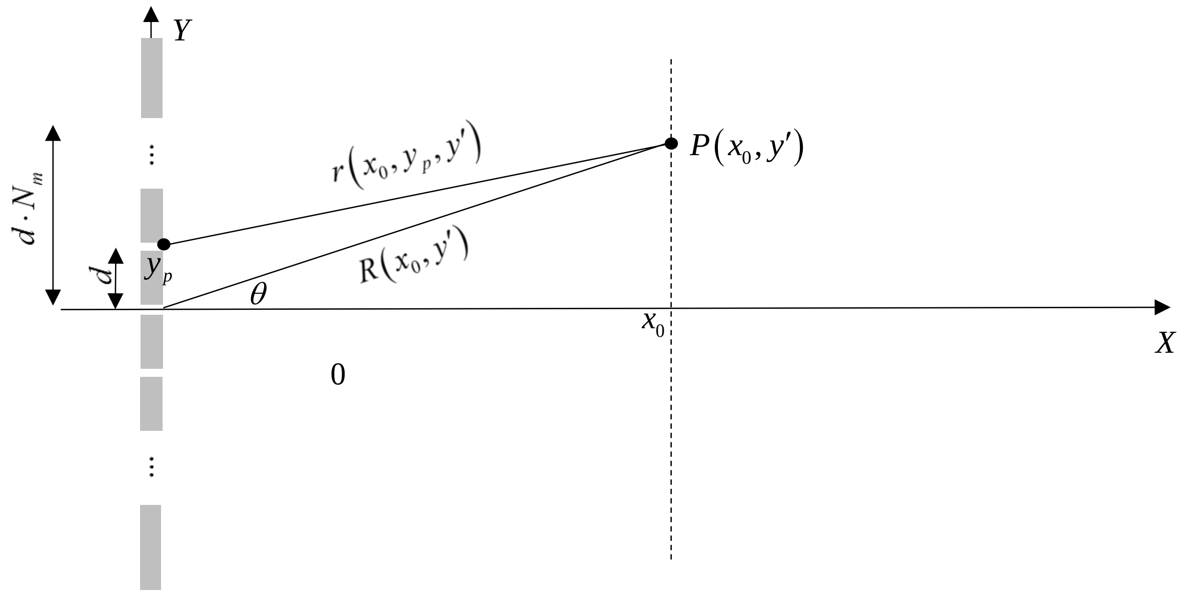
a) (15 Points). Soit, comme le montre la figure, une fente de dimension a dans un écran opaque situé dans le plan $x = 0$ et un point P d'observation de coordonnées x_0 et y' situé à une distance $R(x_0, y')$ du centre de la fente. La vibration totale en P est égale à la somme de toutes les vibrations provenant de la ligne source de longueur a. En supposant que l'approximation de Fraunhofer est valide $y/R(x_0, y') << 1$, calculer la distribution angulaire de l'intensité diffractée $I(\theta)$ dans le plan $x = x_0$.

   Indice : l'ondelette émise par la source ponctuelle en $(0, y)$ a la forme $\exp\left(i \cdot k \cdot r(x_0, y, y') + \varphi(y)\right)$, où $\varphi(y)$ est une phase supplémentaire causée par la présence d'une plaque en matériau non homogène dans la fente.

b) (5 Points). Trouvez la position angulaire du maximum principal de l'intensité diffractée.

c) (5 Points). Trouvez les positions angulaires des minimums dans la distribution de l'intensité diffractée.

Problème 4 (25 points). Réseau de diffraction.



Un réseau de diffraction est un dispositif optique composé d'une série de fentes parallèles (réseau en transmission) usinées dans un écran opaque. Ces traits sont espacés de manière régulière. L'espacement est appelé le « pas » du réseau d. Soit une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ qui atteint un réseau de diffraction placé perpendiculairement à la direction de propagation de cette onde. Ce réseau contient $2 \cdot N_m + 1$ fentes. L'onde est perturbée par l'écran et en passant par les fentes, elle diffracte, c'est-à-dire qu'il y a dispersion angulaire de l'onde. Afin de caractériser la dispersion angulaire, on propose d'utiliser le principe de Huygens selon lequel chaque fente se comporte comme une source ponctuelle secondaire qui émet une ondelette circulaire. Les ondelettes issues de chaque fente interfèrent entre elles et la solution du problème de diffraction consiste à calculer la somme des amplitudes des ondelettes au point d'observation. Répondez aux questions suivantes :

a) (10 Points). Soit, comme le montre la figure, $y_p = d \cdot p,\ p \in [-N_m, ..., N_m]$ est la position de la fente p dans l'écran opaque situé dans le plan $x = 0$. Supposons aussi qu'un point d'observation P de coordonnées x_0 et y' est situé à une distance $R(x_0, y')$ du centre de la fente. La vibration totale en P est égale à la somme de toutes les vibrations provenant des $2 \cdot N_m + 1$ sources ponctuelles situées aux positions des fentes. En supposant que l'approximation de Fraunhofer est valide ($y_p / R(x_0, y') << 1$) pour toutes les fentes, calculer la distribution angulaire de l'intensité diffractée $I(\theta)$ dans le plan $x = x_0$. Tracez $I(\theta)$ de façon schématique.

Indice 1 : l'ondelette émise par la source ponctuelle en $(0, y_p)$ a la forme $\exp\left(i \cdot k \cdot r\left(x_0, y_p, y'\right)\right)$.

Indice 2 : dans vos développements vous pouvez utiliser l'égalité suivante :

$$\sum_{p=-N}^{N} \exp(i \cdot \xi \cdot p) = \sin\left(\frac{\xi}{2}(2N+1)\right) \Big/ \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

b) (5 Points). Trouvez l’expression pour les positions angulaires $\theta_n^{\max}$ des maximums principaux de l’intensité diffractée. L’indice n dans ce cas est appelé l’ordre de diffraction.

c) (5 Points). Trouvez la largeur angulaire de l’ordre de diffraction n en supposant que $\theta_n^{\max} << 1$ pour cet ordre. La largeur angulaire $2 \cdot \delta\theta_n$ d’un ordre de diffraction n est défini comme la distance angulaire entre les deux zéros (dans la distribution d’intensité $I(\theta)$) les plus proches de la position du maximum $\theta_n^{\max}$.

d) (5 Points). Trouvez la résolution spectrale du réseau de diffraction pour un ordre de diffraction n en supposant que $\theta_n^{\max} << 1$ pour cet ordre. La résolution spectrale $\delta\lambda_n$ est définie de sorte à ce que le maximum d’intensité pour un ordre de diffraction n et une longueur d’onde $\lambda + \delta\lambda_n$ coïncide avec le minimum d’intensité le plus proche au maximum spectral pour un ordre de diffraction n et longueur d’onde λ.