ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

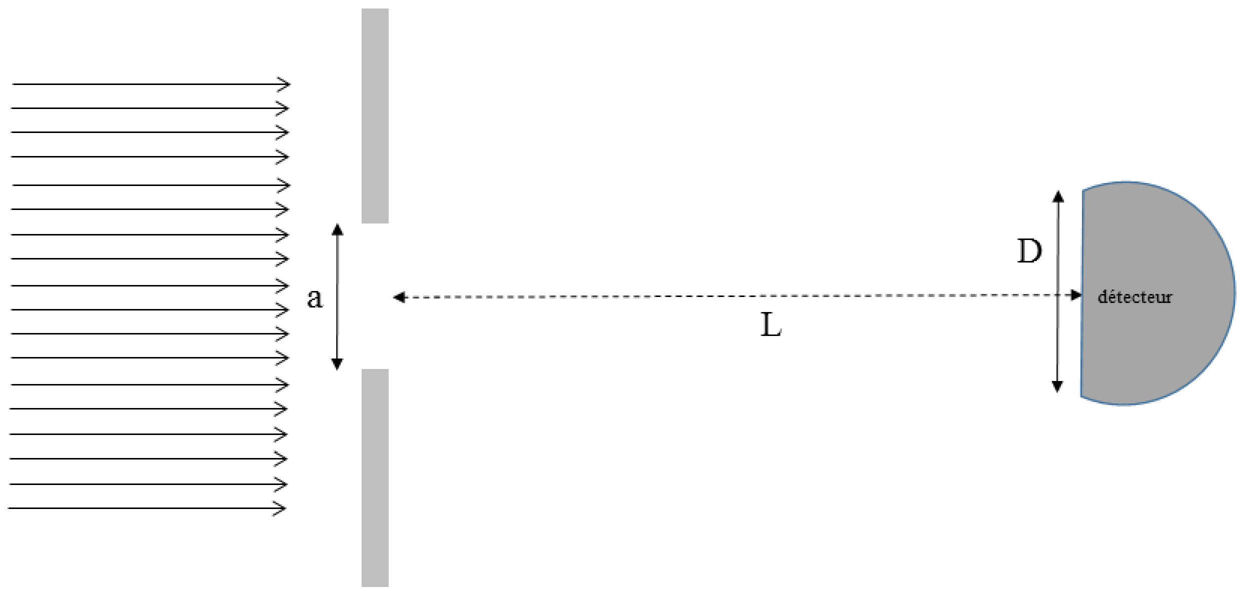
SESSION DE MAI 2016

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l’examen : 3 heures

14-PH-A7 OPTIQUE

14-PH-A7 Optique (100 points).

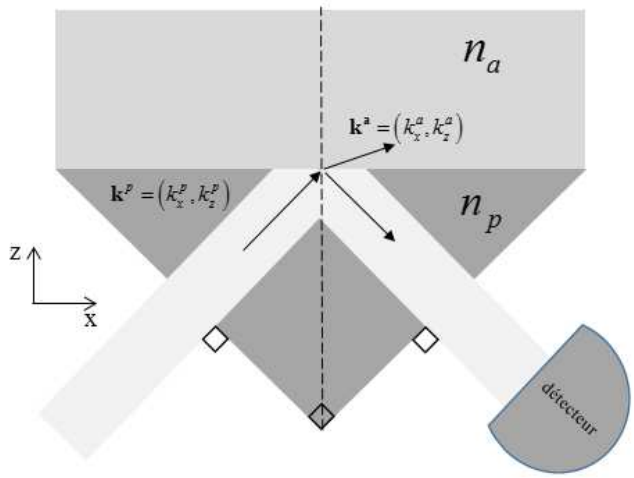
(20 points) Problème 1. Diffraction. Diffraction sur un sténopé.



Considérons un écran opaque dans laquelle on réalise une ouverture circulaire de diamètre a. L'ouverture est illuminée par un faisceau parallèle de lumière monochromatique de longueur d'onde λ. L'angle d'incidence de la lumière est perpendiculaire à l'écran. À droite de l'écran, on place un détecteur optique circulaire de diamètre D à une distance L de l'ouverture. Le centre du détecteur se trouve sur l'axe de symétrie de l'écran avec l'ouverture. La puissance par unité de surface (mesurée en [W/m^2]) portée par le faisceau parallèle est P_0. À cause de la diffraction du faisceau par l'ouverture, la lumière aura une certaine divergence angulaire. Ainsi, le flux net de puissance qui arrivera au détecteur optique dépendra de la distance entre l'ouverture et le détecteur. En supposant que la taille du détecteur est plus grande que la taille de l'ouverture ($D>a$), répondez aux questions suivantes (des réponses approximatives sont suffisantes, aucun développement mathématique lourd n'est nécessaire) :

a) (5 points). En supposant que l'approximation de Fraunhofer est valide (champ lointain), quel est l'angle de divergence du faisceau diffracté ?
b) (5 points). En supposant que l'approximation de Fraunhofer est valide (champ lointain), quelle est la dépendance du diamètre du faisceau diffracté en fonction de la distance L de l'ouverture ?
c) (7 points). En supposant que l'approximation de Fraunhofer est valide (champ lointain) et que le détecteur optique est parfait, quelle est la dépendance de la puissance nette (mesuré en [W]) enregistrée par le détecteur en fonction de la distance L avec l'ouverture ?
d) (3 points). Quelle est la distance minime L_{in} entre l'ouverture et le détecteur pour que l'approximation de Fraunhofer soit valide ?

<u>(25 points) Problème 2. Réflexion et réfraction de la lumière.</u> Sensibilité d'un refractomètre optique.



Considérons un prisme sous la forme d'un triangle isocèle rectangle. Considérons un faisceau parallèle incident perpendiculaire à l'une des deux cathètes du triangle. Le faisceau a une polarisation de type *s* (le vecteur de champ électrique est parallèle à l'interface entre le prisme et l'analyte). Le faisceau incident subira une réflexion à l'interface plane entre le prisme d'indice de réfraction constant n_p et le milieu à l'extérieur du prisme (que l'on appelle analyte) avec un indice de réfraction variable n_a. L'intensité du faisceau réfléchi est enregistré par un détecteur optique mis à la sortie du prisme. Cette intensité est très sensible à la valeur de l'indice de réfraction de l'analyte. C'est cette propriété qui est utilisée dans la conception des réfractomètres optiques. On rappelle que la valeur du coefficient de réfraction de Fresnel (en amplitude) est de la forme :

$$r = \frac{k_z^p - k_z^a}{k_z^p + k_z^a} \text{ (1).}$$

où $\mathbf{k}^p = \left(k_x^p, k_z^p\right)$ est le vecteur d'onde incident dans le prisme, $\mathbf{k^a} = \left(k_x^a, k_z^a\right)$ est le vecteur d'onde transmis dans l'analyte. Répondez aux questions suivantes :

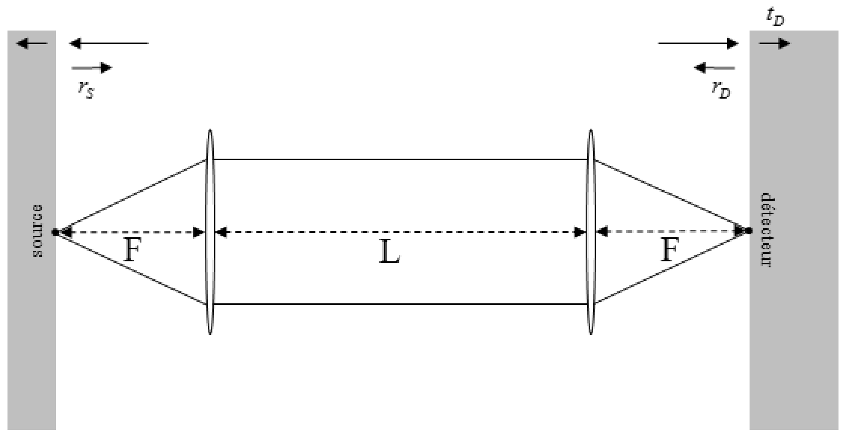
1. (5 points). Trouvez une expression pour le coefficient de réflexion $r(n_p,n_a)$ (voir équation (1)) en termes des indices de réfraction du prisme n_p et de l'analyte n_a uniquement.
2. (5 points) En rappelant que l'intensité d'une onde réfléchie (enregistré par un détecteur optique) est reliée à l'intensité d'une onde incidente par $I_r = I_i \left| r\left(n_p, n_a\right)\right|^2$ trouvez les valeurs de n_a pour lesquelles $I_r = I_i$. (Indice : considérez le phénomène de la réflexion totale interne). Pour ces valeurs de n_a le réfractomètre ne sera pas sensible au changement d'indice de réfraction de l'analyte, limitant son intervalle d'opération.
3. (10 points) Pour les valeurs de n_a pour lesquelles $I_r \neq I_i$ on définit la sensibilité du refractomètre par :

$$S = \frac{1}{I_r}\frac{\partial I_r\left(n_p, n_a\right)}{\partial n_a} \underset{si\ r\left(n_p, n_a\right) \in réel}{=} \frac{2}{r\left(n_p, n_a\right)}\frac{\partial r\left(n_p, n_a\right)}{\partial n_a} \quad (2)$$

Pour ces valeurs de n_a, le réfractomètre est sensible au changement d'indice de réfraction de l'analyte et on pourrait l'utiliser pour détecter les changements dans la valeur de n_a. En utilisant la définition de la sensibilité (2), trouvez l'expression pour la sensibilité (voir équation (2)) uniquement en termes des indices de réfraction du prisme n_p et de l'analyte n_a.

4. (5 points) Trouvez deux valeurs de n_a pour lesquelles la sensibilité devient infinie.

<u>(25 points) Problème 3. Interférence.</u> Interféromètre de Fabry-Perot.



Les systèmes commerciaux de génération et de détection des ondes térahertz continues (ondes électromagnétiques d'amplitude et de fréquence constantes) se trouvent souvent dans la configuration suivante. Une gaufre en silicium agit comme source ponctuelle d'ondes THz (antenne photoconductrice). Cette antenne se trouve au point focal d'une lentille (distance focale *F*) qui est utilisée pour collimater la lumière émise par la source. Ensuite, une deuxième lentille identique se trouve à une distance *L* de la première lentille. Elle est utilisée pour focaliser la lumière sur un détecteur ponctuel sous la forme d'une antenne photoconductrice sur une seconde gaufre en silicium. Le détecteur absorbe une fraction t_D (par amplitude) de la lumière incidente, tandis qu'une fraction r_D (par amplitude) de la lumière est réfléchie. La lumière réfléchie, donc, retourne vers la source d'émission. Quand elle arrive à la source, une fraction (par amplitude) de la lumière est perdue à cause de la diffusion sur l'antenne de la source, tandis qu'une fraction r_S (par amplitude) est de nouveau réfléchie vers le détecteur. De cette manière, une onde émise par la source fait une infinité de parcours entre la source et le détecteur. Le système est identique à un interféromètre de Fabry-Perot. Considérons plus en détail le parcours d'une onde émise par la source. En écrivant l'onde émise sous la forme complexe $E_0 \exp\left(i(kx-\omega t)\right)$ où $k = \omega/c$, répondez aux questions suivantes :

1. (5 points). Donnez l'expression $E_n(\omega,t)$ qui décrit la partie de l'onde originelle détectée après *n* passages aller-retour dans la cavité du résonateur Fabry-Perot.
   Indice : en guise d'exemple pour *n=1* (c'est-à-dire après une émission initiale, un parcours vers le détecteur, une réflexion partielle sur le détecteur, un parcours vers la source, une réflexion partielle sur la source et un parcours vers le détecteur), le détecteur va enregistrer la portion suivante de l'onde initiale $E_1(\omega,t) = E_0 t_D r_D r_S \exp\left(i(3k(2F+L)-\omega t)\right)$
2. (10 points). Trouvez une expression pour l'amplitude complexe totale $E(\omega,t)$ de l'onde enregistrée par le détecteur en faisant la somme de toutes les contributions partielles trouvées à la question 1, $E(\omega,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(\omega,t)$.
3. (5 points). Tracez schématiquement le comportement de l'intensité $I(\omega)$ enregistrée par le détecteur (spectrogramme) en fonction de la fréquence de la source en utilisant $I(\omega) = |E(\omega,t)|^2$

Donnez les expressions pour les positions spectrales des minimums $\omega_{\min}$ et des maximum $\omega_{\max}$ d'intensité $I(\omega)$.

4. (5 points). Trouvez les valeurs d'intensité minimale $I(\omega_{\min})$ et d'intensité maximale $I(\omega_{\max})$ ainsi que le contraste du spectrogramme défini par $\left(I(\omega_{\max})-I(\omega_{\min})\right)/\left(I(\omega_{\max})+I(\omega_{\min})\right)$.

<u>(30 points) Problème 4. Optique guidée</u>. Guide d'onde planaire avec parois métalliques

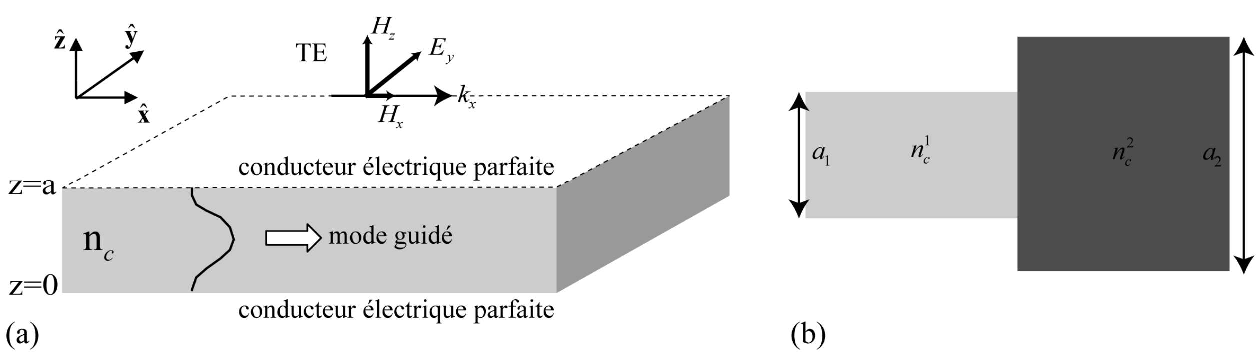


Fig. 1 (a) Schéma d'un guide d'onde planaire avec des parois métalliques (conducteur parfait). (b) Jonction entre les deux guides d'ondes de différentes tailles.

En électromagnétisme, un guide d'onde planaire est réalisée par deux plaques métalliques parallèles séparées par une couche de diélectrique d'épaisseur a et d'indice de réfraction n_c (voir Fig.1). L'une des deux polarisations possibles dans ce cas est celle dite transverse électrique (TE) où le champ électrique a une seule composante le long de l'axe Y : $\mathbf{E} = \left(0, E_y(x,z,t), 0\right)$. De plus, le champ électrique doit être nul sur les parois métalliques puisqu'il s'agit d'une interface avec un conducteur parfait :

$$E_y(x,0,t) = E_y(x,a,t) = 0 \text{ . (1)}$$

Dans le cas de la polarisation TE, le champ électrique respecte les équations de Maxwell sous la forme de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E_y(x,z,t)}{\partial t^2} = 0, \text{ (2)}$$

où la vitesse dans le milieu diélectrique $C = c / n_c$ est égale à la vitesse de la lumière dans le vide divisée par l'indice de réfraction du milieu diélectrique.

La solution complexe qui correspond à l'onde progressive harmonique qui se propage dans la direction $\hat{\mathbf{x}}$ du guide d'onde (mode normal) pourrait être recherchée sous la forme :

$$E_y(x,z,t) = e_y(z) \cdot \exp(i(k_x x - \omega t)), \quad (3)$$

où on suppose que $e_y(z)$ est purement réel. Finalement, la solution physique correspond à la partie réelle de (3)

<u>1) Mode normaux d'un guide d'onde plane.</u>

En tenant compte de la forme de la condition frontière (1),

(i) (5 points). Trouvez la relation de dispersion (relation entre k_x et ω) des modes guidés.

(ii) (5 points). Trouvez la forme de la fonction $e_y(z)$ en (3) qui décrit les modes électromagnétiques guidés.

2) Ondes évanescentes, régimes de propagation monomode et multimode.

Il y a généralement deux types de modes normaux sous la forme (3). En particulier, si k_x est purement réel on a $\mathrm{Re}\left(\exp(ik_x x - i\omega t)\right) = \cos(k_x x - \omega t)$ et (3) définit un mode guidé. Toutefois si k_x est purement imaginaire, on a $\mathrm{Re}\left(\exp(ik_x x - i\omega t)\right) = \mathrm{Re}\left(\exp(i \cdot i\left|k_x\right| x - i\omega t)\right) = \cos(\omega t)\exp(-\left|k_x\right| x)$ et, donc, (3) définit un mode évanescent. Le transport d'énergie par un guide d'onde infini est possible seulement si, pour la fréquence d'opération ω, il existe au moins un mode guidé (c'est à dire au moins une valeur réelle de k_x). Finalement, si pour la fréquence d'opération ω ils existent n valeurs réelles de k_x, on dit que le guide d'onde supporte n modes.

(i) (5 points). Trouvez la fréquence de coupure du mode fondamental ω_1 de sorte que pour $\omega < \omega_1$ le guide d'onde infini soit incapable de transporter l'énergie.

(ii) (5 points). Trouver la plage de fréquence $\omega_1 < \omega < \omega_2$ d'opération monomode (c'est-à-dire la présence d'un seul mode de propagation). Notez que dans la plage de hautes fréquences $\omega > \omega_2$ le guide d'onde supporte plusieurs modes guidés. Par conséquent, ce régime s'appelle le régime d'opération multimode.

(iii) (5 points). Dans le cas d'un guide d'onde de longueur L fini, le transport d'énergie est encore possible, cependant, il n'est pas très efficace à cause de la décroissance exponentielle de l'amplitude du mode guidé. Pour un mode évanescent de fréquence $\omega < \omega_1$, trouvez la longueur maximale L du guide d'onde pour laquelle on est encore capable de détecter la lumière à la sortie. Supposons qu'à l'entrée du guide d'onde, l'intensité de la lumière est I_0, et que seulement le mode fondamental est excité. Supposons aussi que le seuil de détection d'un détecteur optique installé à la sortie du guide d'onde est $I_{\min}$.

(iv) (5 points). Supposons qu'à la sortie du guide d'onde (cœur de taille a_1 et indice de réfraction n_c^1) on place un autre guide d'onde (cœur de taille $a_2 > a_1$ et indice de réfraction n_c^2) (Fig. 1(b)). Supposons que le premier guide d'onde opère en régime monomode. Trouvez les valeurs de l'indice de réfraction du cœur du deuxième guide d'onde n_c^2 pour lesquelles la transmission à travers le système composé des deux guides d'ondes est assurée peu importe la fréquence d'opération du premier guide d'onde.