

ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2015

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A7 – OPTIQUE

1) (20 points) Onde électromagnétique inhomogène.

Soit le champ électrique d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique isotrope homogène sous la forme :

$$\vec{E} = \hat{y} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \cos(k_z z - \omega t).$$

En optique, on dit qu'une onde (1) décrit un faisceau gaussien polarisé dans la direction \hat{y} .

a) (10 points) En utilisant l'équation de Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, trouvez le champ magnétique \vec{B} .

b) (10 points) Trouvez toutes les composantes du vecteur de Poynting moyenné dans le temps (vecteur de flux d'énergie) pour l'onde de ce problème. Quelle est la direction de la propagation d'énergie dans cet exemple ?

Indice : Afin de trouver le vecteur de Poynting moyenné dans le temps, utilisez les expressions suivantes pour les moyennes en temps des produits des fonctions sinusoïdales :

$$\langle \cos(\phi_1 - \omega t) \cos(\phi_2 - \omega t) \rangle_t = \langle \sin(\phi_1 - \omega t) \sin(\phi_2 - \omega t) \rangle_t = \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\langle \sin(\phi_1 - \omega t) \cos(\phi_2 - \omega t) \rangle_t = \frac{1}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

2) (20 points) La puissance d'une source optique anisotrope:

L'intensité d'une source, i.e. la puissance émise par toute la source par unité d'angle solide (W/stéradian) dans une direction donnée est:

$$I(\theta) = I_0 \cos^n(\theta)$$

a) (15 points) Calculer la puissance contenue dans un cône d'ouverture $\pm\tau$ par rapport à l'axe de symétrie.

b) (5 points) Calculer la puissance totale émise par la source.

3) (30 points) Les anneaux de Newton

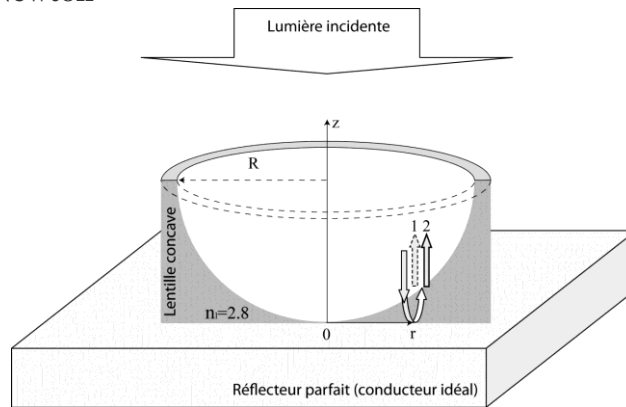


Figure 1. Schéma d'une installation pour l'observation des anneaux de Newton.

Considérons une lentille concave de rayon $R=1\text{ cm}$ dans l'air placée au-dessus du réflecteur plane parfaite (fait de conducteur idéal). Indice de réfraction de la lentille est $n_l=2.8$, tandis que l'indice de réfraction de l'air est $n_a=1.0$. Au centre de la lentille $r=0, z=0$ l'épaisseur de la lentille est infiniment petite. La lentille est éclairée par le haut par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda=600\text{ nm}$. Le faisceau incident est considéré comme ayant un vecteur d'onde (direction de la propagation d'onde) parallèle à l'axe Z . En utilisant un microscope on observe sur l'interface courbée air / lentille des anneaux sombres et éclairés appelées les anneaux de Newton. Ces anneaux apparaissent en raison de l'interférence entre les plusieurs ondes réfléchies. En particulier, la première onde (indiqué comme (1) dans la figure 1) est due à la réflexion directe de l'onde incidente à l'interface air / lentille. L'origine de la deuxième onde (indiqué comme (2) dans la figure 1) est plus complexe. D'abord, une onde incidente est partiellement transmise dans la lentille concave via l'interface air/lentille pour, ensuite être réfléchi sur un réflecteur parfait. Finalement, s'échappé à nouveau de la lentille concave via l'interface lentille/air. Dans ce qui suit nous ignorons la contribution des ondes d'ordre supérieur qui sont dus à des réflexions multiples dans la lentille entre les interfaces d'air et d'un réflecteur parfait.

- (12 points)** En supposant une incidence normale sur les interfaces air / lentille et lentille / réflecteur, en utilisant les expressions pour les coefficients de Fresnel pour réflexion et transmission du champ électrique, et en tenant compte seulement les deux premiers ondes réfléchies (1) et (2) comme indiqué dans la figure 1, trouver l'intensité de champ électrique de l'onde réfléchie totale à la distance r du centre de la lentille. En plus, trouver le coefficient correspondant de la réflexion de puissance.
- (3 points)** Au centre de la lentille attendez-vous un maximum ou un minimum de l'intensité de la lumière (tache sombre ou une tache blanche) comme on l'observe au microscope?
- (8 points)** Trouver les expressions pour rayons des anneaux de Newton correspondants aux maximum r_{max}^p et au minimum r_{min}^p d'ordre p d'une intensité réfléchies. Donner une valeur numérique pour le rayon du première minimum. Dans vos dérivations supposer que $r_{min,max}^p \ll R$.
- (4 point)** En supposant que seuls les deux ondes réfléchies contribuent à l'interférence (ondes (1) et (2) montré sur Figure 1), trouver un contraste relative d'intensité entre les minima et maxima (zones sombres et zones éclairés) et présenter sa valeur numérique:

$$I = \frac{R_{tot}^{max} - R_{tot}^{min}}{R_{tot}^{max} + R_{tot}^{min}}$$

e) (3 points) En supposant que l'onde plane incidente n'est pas monochromatique mais possède un spectre qui s'étend sur une intervalle $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$, où $\Delta\lambda = 6nm \ll \lambda = 600nm$, trouver l'ordre maximal d'anneau qui serait encore distingué au microscope. (Indice: si la position du maximum d'intensité pour une longueur d'onde quelconque coïncide avec la position du minimum d'intensité pour une autre longueur d'onde, puis le contraste entre les anneaux disparaît).

4) (30 points) Potentiel et le champ électrique du quadrupôle.

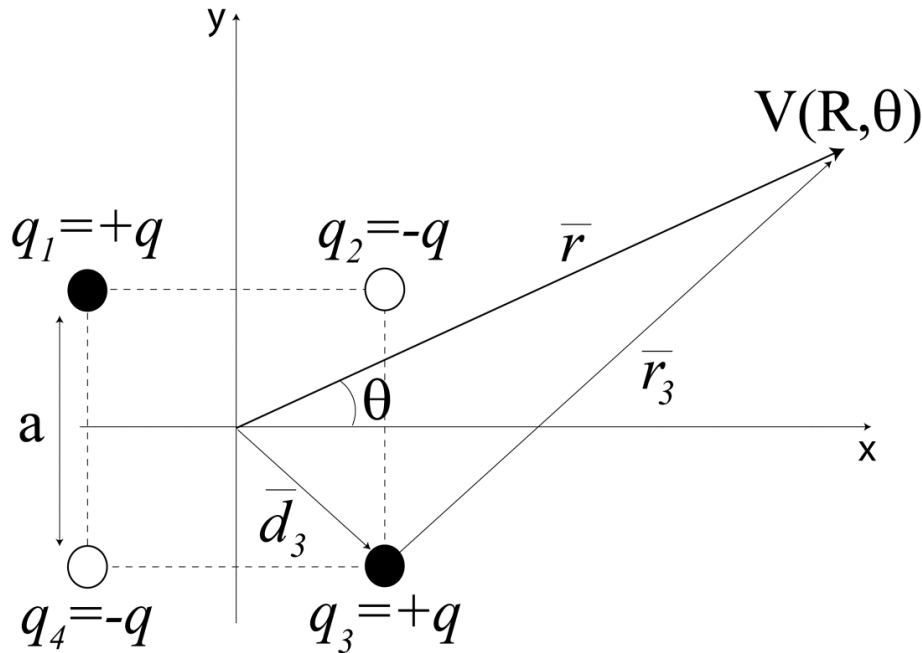


Figure 1.

Le quadrupôle électrique est constitué de deux charges positives $+q$ et deux charges négatives $-q$ placées dans les quatre coins d'un carré de dimension a (voir la figure 1). Le potentiel électrique d'un quadrupôle est donnée par:

$$V(R, \theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\vec{r}_i|} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{d}_i|}$$

a) (20 points) Trouver le potentiel électrique du quadrupôle en fonction de la distance R et l'angle θ en supposant que le point d'observation se trouve dans le plan du quadrupôle, et que la distance entre le point d'observation et le centre du quadrupôle est beaucoup plus grande que la dimension du quadrupôle $|\vec{r}| = R \gg a$.

Indice 1: utilisez le développement de Taylor du facteur $\frac{1}{|\vec{r}_i|}$ en fonction de $\frac{a}{R}$.

Important! Gardez tous les termes jusqu'à l'ordre suivant $\frac{1}{R} \left(\frac{a}{R} \right)^2$.

Indice 2: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$

Indice 3: $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

b) (10 points) En utilisant la forme trouvée ci-dessus, trouvez les composantes $E_x(R, \theta)$, $E_y(R, \theta)$ du champ électrique du quadrupôle.