ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2015

Toute documentation permise
Les calculatrices programmables, les calculatrices communicantes et les ordinateurs sont interdits
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A2 Physique statistique

Note importante :

- Les unités doivent être ajoutées à la fin des résultats finaux.

Constante de Boltzmann k=1,38$\times 10^{-23}$ J/K= 8,62$\times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Stefan-Boltzmann : σ=5,67$\times 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)
Nombre d'Avogadro : $N_{\mathcal{A}}$=6,022$\times$10^{23} noyaux par moles
Approximation de Stirling : pour M très grand, $\ln(M!) \approx M\ln(M) - M$
Les relations suivantes peuvent être utiles

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_a^\infty e^{-x}dx = e^{-ax}$$

Intégrale de volume en coordonnées cylindriques d'un cylindre de rayon R et de hauteur H

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz$$

Question 1 (25 %).

Dans un cristal parfait contenant N atomes, on retrouve généralement les atomes sur les sites réguliers du réseau cristallin. Lorsqu'un atome se place dans un interstice de ce réseau, en laissant un site du réseau régulier vacant, on dit qu'il y a un ≪défaut de Frenkel ≫ dans le cristal. L'énergie nécessaire pour créer un défaut de Frenkel est $\varepsilon > 0$. Ici, on peut supposer qu'il y a autant de positions interstitielles que de sites réguliers dans le réseau du cristal.

a) (15 points) Montrer que l'entropie d'un cristal imparfait ayant une énergie $E = n\varepsilon$ avec $n < N$ est :

$$S(N,E) = -\frac{2k}{\varepsilon}\left[(N\varepsilon - E)\ln\left(\frac{N\varepsilon - E}{N\varepsilon}\right) + E\ln\left(\frac{E}{N\varepsilon}\right)\right]$$

où on a supposé que N et n étaient très grands.

b) (10 points) Calculer la température statistique T de ce réseau en supposant que E =0,01 J, ε =2,0×10^{-20} J et N =1,0×10^{19} atomes.

Question 2 (25 %).

Un modèle simple pour une bande élastique consiste à supposer qu'elle est composée de N bâtonnets rigides, ces bâtonnets étant de deux types : le type ≪1≫ de longueur l_1 et d'énergie interne ε_1 et le type ≪2≫ de longueur l_2 et d'énergie interne ε_2. La longueur totale d'une bande élastique composée de N_1 bâtonnets de type ≪1≫ et de N_2 de type ≪2≫ est donc

$$L = N_1 l_1 + N_2 l_2$$

De plus, si on applique une force k à cette bande élastique son énergie totale interne devient

$$E = N_1(\varepsilon_1 - kl_1) + N_2(\varepsilon_2 - kl_2)$$

a) (5 points) Calculer la fonction de partition $Z(N,T,k)$ de la bande élastique.

b) (8 points) Donner une relation pour l'énergie moyenne interne $\langle E\rangle$ de la bande élastique en fonction de T, l_1, ε_1, l_2, ε_2 et k.

c) (8 points) Donner une relation pour la longueur moyenne $\langle L\rangle$ de la bande élastique en fonction de T, l_1, ε_1, l_2, ε_2 et k.

d) (4 points) Déterminer la longueur moyenne de la bande élastique lorsque $k = 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Question 3 (25 %)

Le chlore 37 très pur est utilisé pour fabriquer des détecteurs de rayonnement. Cet isotope doit donc être isolé du chlore 35 auquel il est mélangé à l'état naturel (75,77% de chlore 35 de masse atomique 34,97 g/mole et de 24,23 % de chlore 37 de masse atomique 36,97 g/mole). Une des méthodes les plus efficaces pour procéder à ce type d'enrichissement (augmenter le rapport chlore 37/chlore 35) est d'utiliser des centrifugeuses.

Le principe de la centrifugeuse est le suivant. On fait tourner rapidement un long cylindre contenant un gaz composé de molécules de différentes masses m_i autour de son axe. L'énergie potentielle de chaque molécule i due à ce mouvement de rotation est alors donnée par

$$V_i(\rho) = -\frac{m_i \omega^2 \rho^2}{2}$$

avec ρ la distance entre la molécule et l'axe du cylindre et ω la vitesse angulaire de rotation de la centrifugeuse en radians par secondes. Comme l'énergie est proportionnelle à la masse des atomes, les noyaux les plus légers auront tendance à se concentrer au centre de la centrifugeuse.

Ici, on supposera que la température à l'intérieur de la centrifugeuse de rayon $a = 10$ cm et de hauteur $h = 80$ cm est constante (ici T=300 K). La centrifugeuse tourne à 70000 tours par minutes. Une mole de chlore naturel y est introduite à la pression atmosphérique.

a) (18 points) Déterminer les distributions radiales $p_{35}(\rho)\rho d\rho$ du chlore 35 et $p_{37}(\rho)\rho d\rho$ du chlore 37 dans la centrifugeuse en rotation.

b) (7 points) Quel est le rapport $p_{37}(a)/p_{35}(a)$ en périphérie de la centrifugeuse?

Question 4 (25 %)

La masse atomique du fer est M=0,0558 kg/mole et sa masse volumique ρ=7870 kg/m^3. Chaque atome de fer contribue un électron au gaz d'électrons participant au courant électrique. L'énergie de ces électrons libres est donnée par la relation

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m_e}$$

où p est la quantité de mouvement de l'électron et m_e sa masse.

Pour un bloc de fer de volume V= 1 m^3, calculer

a) (5 points) la densité électronique N/V des électrons libres;

b) (10 points) l'énergie de Fermi ε_F de ce gaz d'électron;

c) (10 points) l'énergie totale du système en fonction de ε_F à $T = 0$.