ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2014

Toute documentation permise
Les calculatrices programmables, les calculatrices communicantes et les ordinateurs sont interdits
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A2 Physique statistique

Note importante :

- Les unités doivent être ajoutées à la fin des résultats finaux.

Constante de Boltzmann k=1,38$\times 10^{-23}$ J/K= 8,62$\times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Stefan-Boltzmann : σ=5,67$\times 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)
Nombre d'Avogadro : $N_{\mathcal{A}}$=6,022$\times$10^{23} noyaux par moles
Approximation de Sterling : $\ln(N!) = N\ln(N) - N$
Expansions en série pour $x \ll 1$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$$

Les intégrales suivantes peuvent être utiles

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_a^b e^{-\mu x} dx = -\frac{1}{\mu}(e^{-\mu b} - e^{-\mu a})$$

Intégrale de volume en coordonnées sphériques d'une sphère de rayon R

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Question 1 (25%)

Un solide contient N sites atomiques qui sont occupés par des ions chargés négativement (ces ions négatifs correspondent à des impuretés qui ont été implantées dans le cristal). Les sites atomiques disponibles dans le cristal apparaissent en noir à la figure 1 et le site occupé par un ion négatif en gris (indiqué par un signe négatif). Des ions positifs (N, car le solide doit être neutre), qui peuvent se déplacer dans ce solide sous l'effet d'un champ électrique $\mathcal{E}$ dirigé selon l'axe des x, se fixeront obligatoirement sur une des 4 positions intermédiaires dans le réseau qui entourent chaque site chargé négativement (les points blancs à la figure 1). L'énergie $\epsilon(x)$ d'un ion positif se trouvant à une position x par rapport à la position de l'ion négatif est donnée par

$$\epsilon(x) = qx\mathcal{E}$$

Cette énergie sera donc négative ($x = -a/2$) si l'ion positif est situé à gauche de l'ion négatif et positive ($x = a/2$) si l'ion positif est localisé à droite de l'ion négatif (voir Figure 1).

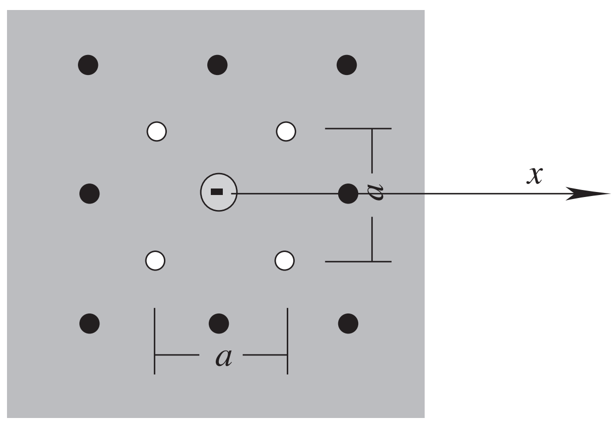

Figure 1: Impuretés dans un solide.

En utilisant cette information, on vous demande de répondre aux questions qui suivent.

a) Déterminez l'entropie $S(E, N, \mathcal{E})$ due à la présence des impuretés dans le système.

b) Évaluez la température $T(E, N, \mathcal{E})$ due à la présence des impuretés dans le système.

Question 2 (25 %)

Une boîte cubique de volume $V = L^3$ (la boîte est localisée dans la région $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ et $0 \leq z \leq L$) est remplie d'une solution aqueuse à la température de la pièce qui contient une petite concentration d'atomes magnétiques de spin $1/2$ et de moment magnétique μ_B. Cette solution est exposée à un champ magnétique B, uniforme en x et y, et qui varie linéairement en z :

$$B(z) = B_1 + \frac{z}{L}(B_2 - B_1),$$

avec $B_1 < B_2$. L'énergie d'un atome magnétique dans ce champ est donnée par

$$\epsilon_\pm(z) = \mp \mu_B B(z),$$

et dépend de son alignement avec le champ magnétique (ϵ_+ s'il est aligné dans la même direction et ϵ_- s'il est aligné dans la direction opposée au champ magnétique). En supposant que $n_\pm(z)dz$ correspond au nombre moyen d'atomes localisés entre z et $z + dz$ dont les spins sont alignés (+) ou dans la direction opposée (-) au champ magnétique et que $n(z)dz$ correspond au nombre moyen d'atomes localisés entre z et $z + dz$.

a) Déterminez le rapport $n_+(L)/n_+(0)$.

b) Montrez que le rapport $n(L)/n(0)$ est donné par

$$\frac{n(L)}{n(0)} = \frac{e^{\beta\mu_B B_2} + e^{-\beta\mu_B B_2}}{e^{\beta\mu_B B_1} + e^{-\beta\mu_B B_1}}$$

avec $\beta = 1/k_B T$.

c) Montrez que si $\mu_B B \ll k_B T$, le rapport $(n(L) - n(0))/n(0)$ est alors proportionnel à $1/T^2$.

Question 3 (25 %)

Un contenant sphérique de rayon a qui contient N molécules dipolaires est maintenu à la température T en présence d'un champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{z}$. L'énergie associée à un dipôle i dans ce champ électrique est donnée par

$$\varepsilon_i = -\mathcal{E}qd\cos(\theta_i)$$

q est la charge des molécules, d la distance qui les sépare et θ_i l'angle entre le dipôle et l'axe des z.

a) Évaluez la fonction de partition de ce système.

b) Déterminez l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de ce système.

c) Calculez le moment dipolaire total du système sachant que $P = -\langle E \rangle / \mathcal{E}$.

d) Évaluez le moment dipolaire à très basse température et très haut champ électrique ($\mathcal{E}qd/k_BT \gg 1$). Qu'en concluez-vous?

Ici, vous supposerez qu'il est possible de négliger l'énergie cinétique des molécules.

Question 4 (25 %).

Considérez une région de volume V remplie de N électrons libres. Chaque électron de quantité de mouvement p et de masse m a une énergie cinétique donnée par $\varepsilon(p) = p^2/(2m)$. Ici on supposera que $\varepsilon < \mu$ où μ est le potentiel chimique.

a) Calculez l'énergie de Fermi $\varepsilon_F(N, V)$ de ce système.

b) Calculez l'énergie totale des électrons en fonction de ε_F lorsque $T = 0$ K.

c) Calculez la vitesse moyenne $\langle |v| \rangle$ des électrons se retrouvant dans cette région.