ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC
SESSION DE NOVEMBRE 2016

Toute documentation permise
Les calculatrices programmables, les calculatrices communicantes et les ordinateurs sont interdits
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A2 Physique statistique

Note importante :

- Les unités doivent être ajoutées à la fin des résultats finaux.

Constante de Boltzmann k=1,38$\times 10^{-23}$ J/K= 8,62$\times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Stefan-Boltzmann : σ=5,67$\times 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)
Nombre d'Avogadro : $N_{\mathcal{A}}$=6,022$\times 10^{23}$ noyaux par moles
Approximation de Stirling : pour M très grand, $\ln(M!) \approx M\ln(M) - M$
Intégrale de volume en coordonnées cylindriques d'un cylindre de rayon R et de hauteur H

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(\rho, \varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz$$

Les relations suivantes peuvent aussi être utiles

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_a^\infty e^{-x} dx = e^{-ax}$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} x^n$$

Question 1 (25 %).

L'Hamiltonien d'une molécule de gaz idéal classique de masse atomique m dans le champ gravitationnel g de la Terre est donné par

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz$$

où $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ est la quantité de mouvement de la molécule et z son altitude mesurée par rapport au sol. Ici, une colonne de gaz à la température T contenant N molécules identiques et indiscernables sera étudiée. Cette colonne a une surface S dans le plan $x - y$ et une hauteur H finie ($0 \leq z \leq H$).

a) (12 points) Calculer la fonction de partition Z de ce système.

b) (6 points) Montrer que la probabilité $P(z)$ de trouver une molécule à l'altitude z est donnée par

$$P(z) = \beta mg \frac{e^{-\beta mgz}}{1 - e^{-\beta mgH}}$$

où $\beta = 1/(kT)$.

c) (7 points) Évaluer $\langle z \rangle$ la position moyenne des molécules dans la colonne.

Question 2 (25 %)

L'énergie totale d'un oscillateur anharmonique à une dimension est donnée par

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + bx^4$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique de l'oscillateur de masse m et le second terme à son énergie potentielle (b est une constante positive). Ici, on supposera que l'oscillateur est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T. On tiendra aussi pour acquis que la mécanique classique est une bonne approximation pour ce problème.

a) (10 points) Évaluer l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ de cet oscillateur.

b) (10 points) Déterminer l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ de cet oscillateur.

c) (5 points) Donner une expression pour la chaleur spécifique à volume constant C_V de cet oscillateur.

Question 3 (25 %).

Le circuit de la figure 1 est composé d'une bobine d'induction L et d'un condensateur de capacité C. Si on décharge complètement le condensateur, on s'attend à observer une tension nulle entre les points A et B. Cependant, si on mesure cette tension en utilisant un voltmètre très sensible, on réalise qu'elle varie légèrement, mais continuellement autour de la valeur $V = 0$. Cette variation correspond au bruit de fond thermique $\sigma_V(T)$ du circuit.

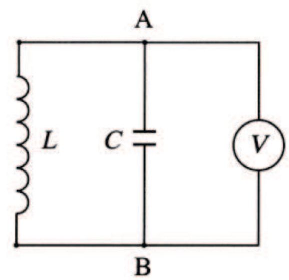

Figure 1: Circuit LC.

Du point de vue de la physique statistique, l'Hamiltonien de ce système est

$$\mathcal{H} = \frac{LI^2}{2} + \frac{Q^2}{2C}$$

lorsqu'une charge Q est stockée dans le condensateur. Cet Hamiltonien correspond à un oscillateur harmonique quantique (ici $I = dQ/dt$ correspond à p_x et Q à x) dont les énergies sont données par

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

où $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

a) (10 points) Déterminer la fonction de partition Z pour ce système.

b) (10 points) Calculer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ stockée dans ce circuit en fonction de la température.

c) (5 points) Évaluer le bruit de fond thermique $\sigma_V(T) = \sqrt{\langle E \rangle / C}$.

Question 4 (25 %)

Le soleil de rayon $R_S = 7 \times 10^8$ m peut être considéré comme un corps noir à une température $T_S = 6000$ K. On supposera que la terre, qui se situe à une distance moyenne $d = 1.5 \times 10^{11}$ m du soleil et a un rayon $R_T = 6.4 \times 10^6$ m, absorbe toute l'énergie qui l'atteint et se comporte aussi comme un corps noir (la surface que la terre expose au soleil en tout temps est de πR_T^2).

a) (15 points) Calculer la température de la terre résultant de son exposition au soleil.

b) (5 points) Évaluer la force que le rayonnement émis par le soleil exerce sur la terre.

c) (5 points) À quelle distance une particule métallique agissant comme un corps noir fondra-t-elle en se rapprochant du soleil (température de fusion du métal de $T_p = 1500$ K)?