ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2014

Toute documentation permise
Les calculatrices programmables, les calculatrices communicantes et les ordinateurs sont interdits
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A2 Physique statistique

Note importante :

- Les unités doivent être ajoutées à la fin des résultats finaux.

Constante de Boltzmann k=1,38$\times 10^{-23}$ J/K= 8,62$\times 10^{-5}$ eV/K
Constante de Stefan-Boltzmann : σ=5,67$\times 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)
Nombre d'Avogadro : $N_{\mathcal{A}}$=6,022$\times$10^{23} noyaux par moles
Les relations suivantes peuvent être utiles

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_a^\infty e^{-x}dx = e^{-ax}$$

Intégrale de volume en coordonnées cylindriques d'un cylindre de rayon R et de hauteur H

$$\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz$$

Question 1 (25 %)

Un cylindre contient 2000 kg de méthane (on supposera ici que le méthane est un gaz idéal de masse moléculaire de 16 g/mole). Ce cylindre de 10 m de haut et d'un rayon de 5 m est debout (axe du cylindre perpendiculaire au sol, dans la direction z). Pendant la période estivale, le cylindre est à une température uniforme de 20 C la nuit. Le jour, le haut du cylindre est exposé au soleil et sa température augmente à 35 C alors que la surface du bas conserve sa température de 20 C. En supposant que la température du méthane dans le cylindre le jour varie linéairement en fonction de la hauteur z (cette température est uniforme la nuit), déterminez

a) La pression à l'intérieur du cylindre durant la nuit.

b) La pression à l'intérieur du cylindre durant la journée.

Question 2 (25 %)

On fait circuler un courant élevé dans les deux fils parallèles d'un calorifère électrique (Figure 1). Ces fils ont un rayon de $r = 1$ mm et une longueur de $L = 1$ m et sont séparés par une distance d. La puissance électrique dissipée P_d dans chacun des fils est de 1000 Watts.

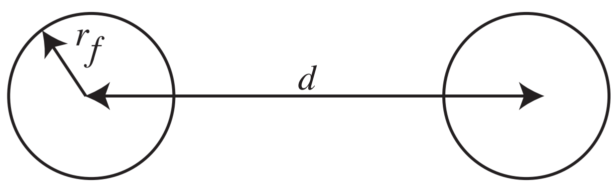

Figure 1: Deux fils parallèles de rayon r dans le vide séparés par une distance d.

En supposant que les deux fils agissent comme des corps noirs et que le rayonnement par l'extrémité des fils est négligeable :

a) Évaluez la température que les fils atteindront s'ils sont isolés dans l'espace (la distance d entre les fils est très grande) ;

b) Quelle sera la température des fils s'ils sont séparés par une distance d=5 mm? Ici, vous supposerez que l'énergie rayonnée par un fil est en partie absorbée par le second fil (surface d'absorption $S_a = 2rL$ à une distance moyenne d du centre du premier fil).

Question 3 (25 %)

Un fil métallique de rayon R_0 est entouré d'un cylindre métallique de rayon $R_1 > R_0$ tous deux de longueur L (voir Figure 2). Le fil est maintenu à une faible tension électrique V par rapport au cylindre et le système est à la température T. Ainsi, les électrons émis par les métaux (émission thermoélectronique de très faible intensité) forment un gaz très dilué qui occupe l'espace vide à l'intérieur du cylindre ($R_0 \leq r \leq R_1$ et $0 \leq z \leq L$).

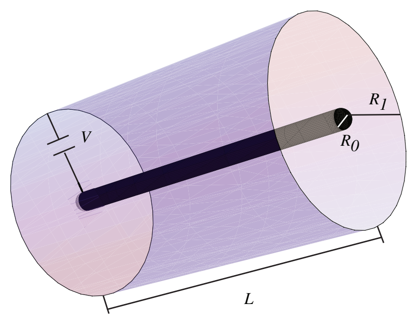

Figure 2: Cylindre coaxial sous tension

Le cylindre et le fil de longueur L sont suffisamment longs pour que l'on puisse supposer que l'énergie totale des électrons qui peuvent être émis est donnée par

$$\epsilon = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + a \ln\left(\frac{r}{R_0}\right)$$

Ici p_x, p_y et p_z représentent les composantes x, y et z de la quantité de mouvement de l'électron de masse m et de charge q et r est la position radiale de l'électron par rapport au centre du fil (nous utiliserons ici les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) pour représenter la position de l'électron). La constante a est donnée par

$$a = qV \frac{1}{\ln(R_1/R_0)}$$

a) Déterminez la fonction de partition pour un électron dans ce système.

b) Quelle est la probabilité $P(r)dr$ de trouver un électron à une distance r du fil central?

Question 4 (25 %)

Le potentiel de l'ensemble grand canonique pour un gaz de fermion libre à basse température obtenu en utilisant les statistiques de Fermi-Dirac est donné par :

$$\Psi(\mu, T) = -CV(k_B T)^{5/2} I_{3/2}\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$$

avec

$$C = \frac{8\pi}{3h^3}(2m)^{3/2}$$
$$I_{3/2}(\eta) = \frac{2}{5}\eta^{5/2}\left[1 + \frac{5\pi^2}{8\eta^2}\right]$$

où μ est le potentiel chimique, T la température et V le volume.

a) Déterminez l'entropie de ce système.

b) Calculez le nombre moyen d'électrons libres en fonction de la température T et du potentiel chimique

c) Sachant que le potentiel chimique est donné par

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi k_B T}{\epsilon_F}\right)^2\right]$$

trouvez une relation entre l'énergie de Fermi ϵ_F et la densité de population des électrons $\rho = N/V$ à la température $T = 0$.