ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2017

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l’examen : 3 heures

14-PH-A1 MÉCANIQUE CLASSIQUE

Notes importantes :

- Le questionnaire comprend trois (3) problèmes totalisant douze (12) sous-questions;
- L’examen est noté sur 100 points;
- Toute documentation est permise;
- Prenez soin d’expliquer votre démarche et au besoin d’exprimer vos hypothèses, car la correction en tiendra compte;
- Les résultats numériques demandés doivent avoir les unités appropriées.

Problème 1: Accélération humaine (30 points)

Le sprinter Usain Bolt détient deux records olympiques majeurs, soit au 100 m (9,64 s) et au 200 m, (19,35 s). On dit que son plus grand avantage sur ses adversaires est sa taille (1,96 m, 94 kg), ce qui lui permet de franchir la distance en moins de pas que ses adversaires.

A) En supposant un mouvement uniformément accéléré, calculer l'accélération d'Usain Bolt durant sa course et sa vitesse lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée. (10 points)
B) Tracer approximativement la vitesse du coureur en fonction du temps durant la course. Cette courbe est-elle réaliste? Sinon, expliquer par des arguments physiques ce qui ne fonctionne pas. (5 points)

Un modèle plus réaliste tiendrait compte du fait que l'accélération de Bolt est maximale au départ et décroît jusqu'au moment où il atteint sa vitesse de croisière. On propose le modèle suivant:

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$$

Où a_0 = 11,57 m/s^2 est l'accélération au bloc de départ et τ =1 s est une constante de temps.

C) Calculez la vitesse du coureur à la ligne d'arrivée selon ce nouveau modèle. (5 points)
D) En déduire la puissance moyenne qu'il génère lors de sa course; (5 points)
E) Pour tester le modèle, déterminer si le modèle estime adéquatement le temps que Bolt prend pour courir le 200 m. Sinon, estimez l'erreur. Le modèle surestime-t-il le temps de course de Bolt ou bien le sous-estime-t-il? (5 points)

Problème 2: Lagrangien d'un yoyo (35 points)

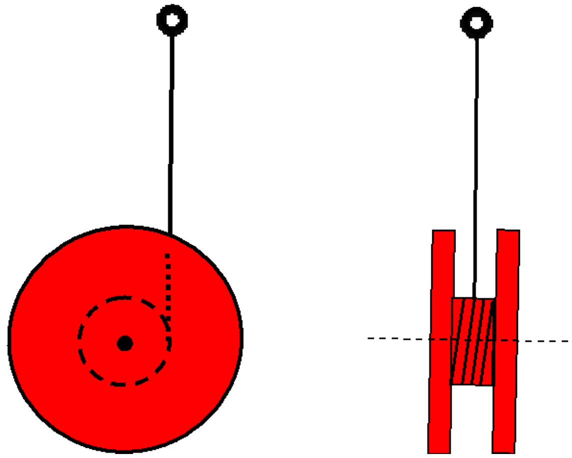

Figure 1 : *Schéma du système mécanique étudié.*

Un yoyo est formé d'un poids de masse m et de rayon de giration k. Une corde de longueur L est enroulée autour d'un baril de rayon R. (Supposez $L >> R$). Au départ, la corde est enroulée au complet autour du yoyo et la partie libre est attachée à un anneau fixe. On laisse filer le système à partir du repos. Négligez tout frottement.

A) Écrire le lagrangien du système en utilisant comme coordonnée généralisée l'angle de rotation du yoyo. Dans ce repère, l'angle lorsque le yoyo est parfaitement enroulé doit valoir θ et quand le yoyo est parfaitement déroulé, $\theta = L/R$. (10 points)
B) Donnez le(s) équation(s) d'Euler-Lagrange associée(s) au mouvement (5 points)

Lorsque le yoyo arrive au bout de sa corde, il s'enroule à nouveau vers le haut, puis redescend, etc. En absence de frottement, un mouvement périodique de période T a été effectué lorsque le yoyo revient <u>exactement</u> à sa position initiale.

C) Donnez l'expression de la période d'une oscillation du yoyo (10 points).
D) Donnez l'équation de la trajectoire du centre de masse du système dans l'espace de phase (représentant le moment cinétique du yoyo en fonction de sa position angulaire). Tracez-là sur un graphique. Indiquez les valeurs maximales et minimales d'angle et de moment cinétique atteints dans l'espace de phase. Pour cette sous-question, supposez un système d'unités tel que $m = k = R = g = 1, L = 100R$. Soyez le plus précis possible. (10 points)

Rappel : Définition du moment d'inertie à partir du rayon de giration : $I_{CM} = mk^2$ (l'indice CM signifie une rotation autour du centre de masse du yoyo).

Problème 3 : La mission spatiale Osiris-Rex de la Nasa (35 points)

Le 8 septembre 2016, une fusée Atlas-V décolle de Cape Canaveral, emportant en son bord l'orbiteur Osiris-Rex, dont la mission sera d'aller prélever un échantillon de sol sur l'astéroïde Bénou et de le ramener sur Terre. La manœuvre de prélèvement d'échantillon est prévue pour 2020.

Avant le prélèvement, l'orbiteur sera placé en orbite géostationnaire (ou plutôt « astéroïdostationnaire ») afin de visualiser le point de contact. Le jour du prélèvement, une double manœuvre lui fera s'approcher de la surface de l'astéroïde jusqu'à le toucher, ce qui lui donnera quelques secondes pour collecter un échantillon de sol Bénou-ien. Une fois l'échantillon collecté, des rétrofusées seront activées et l'orbiteur sera éjecté de l'orbite de Bénou pour être recapturé par celui de la Terre. Le retour sur Terre est prévu pour 2023.

L'orbiteur Osiris-Rex au moment de son chargement à bord de la fusée Atlas V (2016).

La masse d'Osiris-Rex vaut $M_{OR} = 2100\ kg$.
Supposez-la constante durant toute la manœuvre.

Quelques données concernant l'astéroïde Bénou :
- Masse : $M_B = 7 \times 10^7$ kg
- Rayon moyen : $R_B = 250$ m
- Période de révolution (sur lui-même): $T_B = 4{,}3$ h (15480 s)
- Le sol de Bénou est supposé très mou à cause de sa faible gravité. Il ne faut en aucun cas que l'orbiteur ne s'y enfonce.

On vous demande d'analyser l'éjection d'Osiris de la planète pour son retour sur Terre.

A) Calculez la distance de l'orbiteur à la surface de l'astéroïde alors qu'il est en orbite géostationnaire. (15 points)
B) Une fois atterri sur l'astéroïde et l'échantillon collecté, quelle est l'impulsion minimale requise pour libérer Osiris-Rex de l'attraction de Bénou sachant qu'il possède initialement une vitesse initiale nulle par rapport à la surface en rotation de l'astéroïde. Les propulseurs de l'orbiteur doivent être actionnés <u>tangentiellement</u> à la surface de l'astéroïde pour éviter de soulever des débris de son sol peu compact. (10 points)

Plutôt que d'appliquer l'impulsion calculée en B), la mission prévoit appliquer sur l'orbiteur une impulsion telle que sa vitesse soit exactement de 20 cm/s par rapport au centre de masse de Bénou, toujours tangentiellement à sa surface.

C) Donnez l'équation $r(\phi)$ décrivant la trajectoire de l'orbiteur par rapport à Bénou, où r est la distance entre l'orbiteur et le centre de masse de Bénou, et ϕ est la position angulaire de l'orbiteur ($\phi = 0$ représente la position angulaire du périapse, le point de la trajectoire le plus proche du centre de la planète). Sachant que cette équation a la forme $r(\phi) = c/(1+\varepsilon\cos\phi)$, calculez les valeurs de c et ε. Faites un schéma le plus précis possible de la trajectoire de l'orbiteur une fois qu'il a quitté la surface de Bénou. Est-il toujours en orbite autour de Bénou? (10 points)