

ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2017

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A1 MÉCANIQUE CLASSIQUE

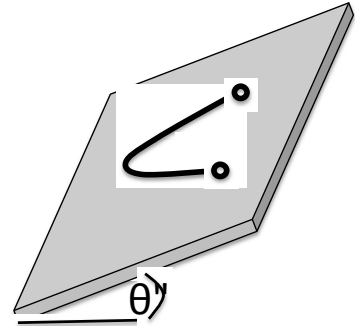
Notes importantes :

- Le questionnaire comprend quatre (4) problèmes totalisant douze (14) sous-questions;
- L'examen est noté sur 100 points;
- Toute documentation est permise;
- Prenez soin d'expliquer votre démarche et au besoin d'exprimer vos hypothèses, car la correction en tiendra compte;
- Les résultats numériques demandés doivent avoir les unités appropriées.

Problème 1: Chaîne sur un plan sans friction (25 points)

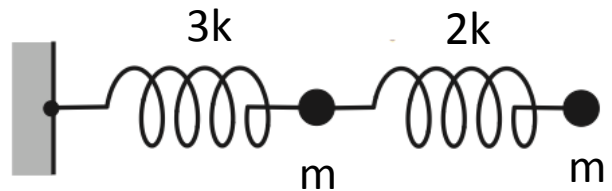
On accroche une chaîne mince de longueur L à deux crochets équidistants situés à la même hauteur sur un plan incliné. Le frottement entre la corde et le plan peut-être négligé.

- A. Déterminer la fonction à minimiser pour trouver la forme de la corde (10 points)
- B. À l'aide du calcul variationnel, donnez l'équation différentielle permettant de trouver la forme de la corde; (10 points)
- C. Vrai ou faux : La forme de la corde dans le plan incliné sera identique à la forme de la même corde vertical si elle était suspendue dans le vide. Justifiez. (5 points)



Problème 2: Système masses-ressorts couplés (30 points)

Un système tel que décrit à la figure ci-contre est déposé horizontalement sur une table sans friction. Les masses ponctuelles sont identiques et reposent sur la table directement. Les ressorts sont de constantes respectives $3k$ et $2k$, où k est une constante positive.



- a) Combien de degrés de liberté le système possède-t-il? (5 points)
- b) Donnez un système de coordonnées généralisées permettant de décrire le système (5 points)
- c) Donnez le lagrangien permettant de caractériser complètement le mouvement du système; (10 points)
- d) Utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour obtenir les équations du mouvement du système; (5 points)
- e) Obtenez les fréquences propres d'oscillation du système (5 points)

Problème 3: Hamiltonien d'un corps en chute libre (25 points)

Une balle est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v} = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$ à partir de l'origine d'un repère cartésien. La gravité est orientée selon l'axe z, soit $\vec{g} = -g\hat{z}$.

- Donnez l'Hamiltonien correspondant à ce système. (10 points)
- Donnez les équations d'Hamilton correspondant au mouvement de ce système. (10 points)
- Avec les conditions initiales du problème, trouvez l'expression de $\vec{r}(t)$ du mouvement dans le repère (5 points)

Problème 4: Masse du trou noir Cygnus X1 (20 points)

La masse du trou noir de la constellation du Cygne (Cygnus X1) a été calculée en observant la période de révolution de l'étoile géante bleue HDE226268 (HDE) en orbite autour de celui-ci. Les deux étoiles forment un système binaire isolé (deux corps isolés dans l'espace en interactions uniquement par leur attraction gravitationnelle mutuelle). Les données astronomiques mesurées sur HDE sont les suivantes :

Masse de HDE : 4×10^{31} kg (20 masses solaires)
Rayon de son orbite circulaire : $R_{\text{HDE}} = 3 \times 10^{10}$ m
Période de révolution de HDE : 5,6 jours.

Avec ces données, effectuez les prédictions suivantes le plus précisément possible. Donnez tous vos calculs et raisonnements :

- La masse de Cygnus X1 (10 points) ;
- Sa période de révolution (5 points) ;
- Le rayon de son orbite circulaire (indice : les deux objets sont en orbites concentriques autour du centre de masse) (5 points);