ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2015

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A1 MÉCANIQUE CLASSIQUE

Notes importantes :

- Le questionnaire comprend cinq (5) problèmes;
- L'examen est noté sur 100 points;
- Toute documentation est permise;
- Prenez soin d'expliquer votre démarche et au besoin d'exprimer vos hypothèses, car la correction en tiendra compte;
- Les résultats numériques demandés doivent avoir les unités appropriées.

Problème 1 : Lagrangien d'un système oscillant (20 points)

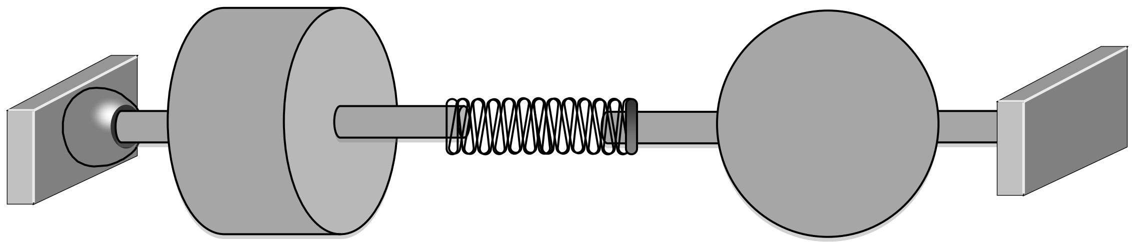


Figure 1 : *Schéma du système mécanique étudié.*

Un disque plein et une sphère de mêmes masses *m* et de mêmes rayons *R* sont fixés sur un essieu sans masse et reliés par un <u>ressort de torsion</u> de constante de rappel *K*. L'essieu peut tourner librement autour de son axe.

Au temps t = 0, on tient la sphère en place et on fait tourner le disque de 90 degrés autour de l'axe. On laisse ensuite filer le système à partir du repos.

A) Faire un choix de coordonnées généralisées pour étudier ce problème. Décrivez précisément chaque coordonnée ainsi que leur point de référence. (5 points)
B) Écrire le lagrangien du système (5 points)
C) Donnez les équations d'Euler-Lagrange associées au système. (5 points)
D) Déterminez, en fonction de *K*, *m* et *R*, la période d'oscillation du système (5 points)

Information utile sur le problème :

- Négligez tout frottement;
- L'essieu demeure parfaitement droit en tout temps;
- Le moment d'inertie d'un disque plein autour de son axe vaut $I_D = ½*mR^2$. Le moment d'inertie d'une sphère pleine autour d'un de ses diamètres vaut $I_S = 2/5*mR^2$.
- Un ressort de torsion génère un couple de rappel qui est directement proportionnel à son angle de torsion ($M = -K\theta$).

Problème 2 : Espace de phase (10 points)

Pour les deux systèmes mécaniques suivants, tracez qualitativement (mais le plus fidèlement possible) la trajectoire de l'évolution du système dans chacun des plans de phase (p vs q) pour $t > 0$. Ici, q est la coordonnée généralisée et p_i est son moment conjugué. Indiquez clairement sur le graphique le sens et la position du zéro de votre coordonnée généralisée au temps t = 0. Indiquez par des flèches le sens du déplacement dans l'espace de phase à mesure que t augmente.

a) Un système masse ressort, de masse m et de constante de rappel k, suspendu verticalement. Au temps t = 0, on étire le ressort vers le bas d'une distance d par rapport à sa position d'équilibre, et on le laisse filer à partir du repos. Négligez tout frottement. (5 points)

b) Une rondelle de masse m est échangée rapidement par deux joueurs de hockey. Les joueurs sont placés face à face et séparés d'une distance d. Le premier joueur est placé à l'origine de votre repère et le second à $+d$. En frappant la rondelle sur réception, ils lui fournissent une impulsion qui la fait se déplacer en ligne droite dans un mouvement de va-et-vient de module de vitesse constant v, sauf lors des impacts supposés très courts. Le frottement sur la glace est négligeable. À l'instant t = 0, la rondelle est à une distance d/2 des joueurs et se dirige dans le sens positif de votre repère (5 points)

Justifiez vos réponses

Problème 3 : La mission Rosetta de l'Agence Spatiale Européenne (30 points)

Le 12 novembre 2014, l'atterrisseur Philae s'est posé sur la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko (67P) avec succès (« atchourrissage » réussit). Afin de réussir cette prouesse, Philae a été transportée par la sonde Rosetta jusqu'en orbite basse autour de 67P. L'approche finale de la sonde Rosetta et l'atterrissage de Philae peuvent être subdivisés en trois étapes :

Phase 1 (orbite elliptique, 8 octobre 2014) : La sonde entre dans une orbite stable formant une ellipse dont le périapse et l'apoapse sont respectivement de 10 km et 20 km (voir Figure 2);
Phase 2 (orbite circulaire, 15 octobre 2014) : L'orbite est circularisé à 10 km de rayon par une propulsion au périapse dans une direction judicieusement choisie.
Phase 3 (atterrissage, 12 novembre 2014) : L'atterrisseur Philae est propulsé avec une vitesse nette de 1 m/s en direction purement radiale, relative à 67P. Il est muni de grappins afin d'éviter qu'un rebond le fasse quitter l'orbite de la comète.

On vous demande d'analyser ici quelques caractéristiques de cette approche. Ces données <u>pourraient</u> vous être utiles.

- Rayon moyen de la comète 67P : R_m = 1,7 km. (Supposez l'astéroïde sphérique bien que la réalité est plus complexe : voir Figure 2, gauche)
- Masse de la comète : 1×10^{13} kg
- Masse de Rosetta (incluant l'atterrisseur Philae) : 1420 kg
- Supposer que le système Rosetta- 67P est isolé.
- Pour la phase 2, supposez que la propulsion génère une impulsion instantanée par rapport à l'orbite de la sonde et qu'elle n'engendre aucune variation de masse.

Problème 3 (suite)

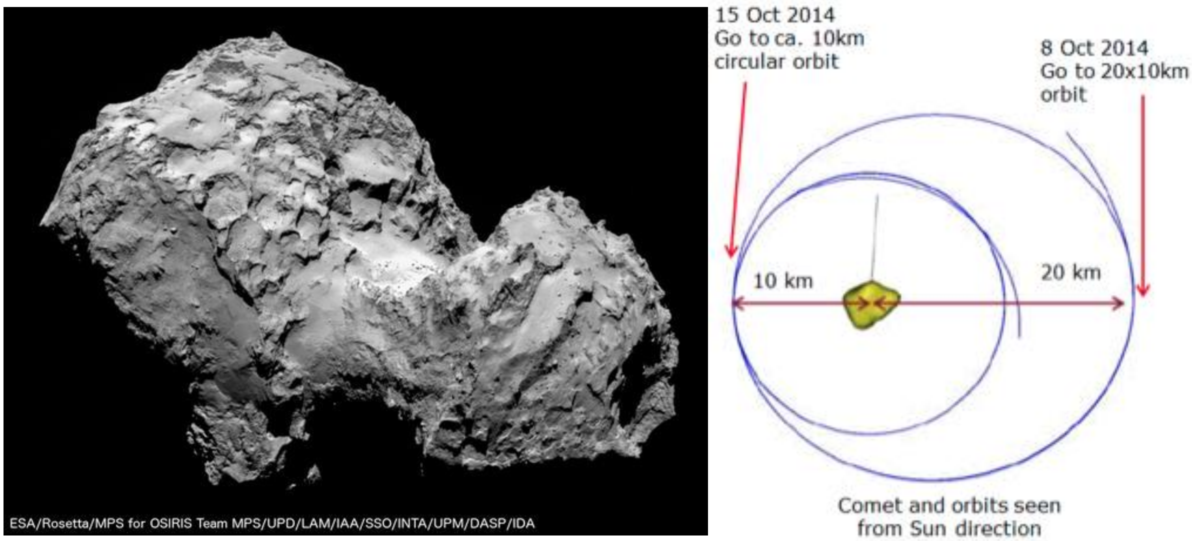


Figure 2 : (Gauche) Une photo de la comète 67P prise par la sonde Rosetta. (Droite) Schéma des phases 1 et 2 de l'approche. L'orbite elliptique est convertie en orbite circulaire grâce à une impulsion rapide générée au périapse par le système de propulsion de la sonde[1].

A) Pour les phases 1 et 2, calculez, en jours, la période de révolution de la sonde. (10 points)

B) Lors de la phase 2, déterminez la grandeur et la direction de l'impulsion nécessaire pour circulariser l'orbite (en [kg m s^{-1}]). L'impulsion doit se faire au périapse de l'orbite elliptique. (12 points)

C) Lors de la phase 3, calculez la vitesse d'atterrissage de Philae, qui ne dispose d'aucun moyen d'autopropulsion. (4 points)

D) Les grappins anti-rebonds sont-ils nécessaires dans ce scénario? Justifiez par des arguments physiques et en calculant la vitesse de libération de Philae de l'orbite de 67P? (4 points)

[1] http://blogs.esa.int/rosetta/2014/09/10/down-down-we-go-to-29-km-or-lower/

Problème 4 : Déraillement d'un train en rotation (20 points)

Un train miniature de masse *m* est monté sur deux rails de séparation *a* fixés à une plaque tournante circulaire de rayon *R*. L'axe passant par le centre des rails suit un diamètre de la plaque. Le centre de masse du train est situé à une hauteur *h* en plein centre des rails. Au temps t = 0, le train est au repos et placé au centre de la plaque. On met soudainement la plateforme en rotation à vitesse angulaire constante Ω. Comme le train est en équilibre instableau centre de la plaque, il se mettra à rouler en accélérant vers l'extérieur.

Supposer que le rayon du disque *R* est infiniment grand pour ce problème, de telle sorte que le train ne tombe jamais du disque. Négliger tout frottement.

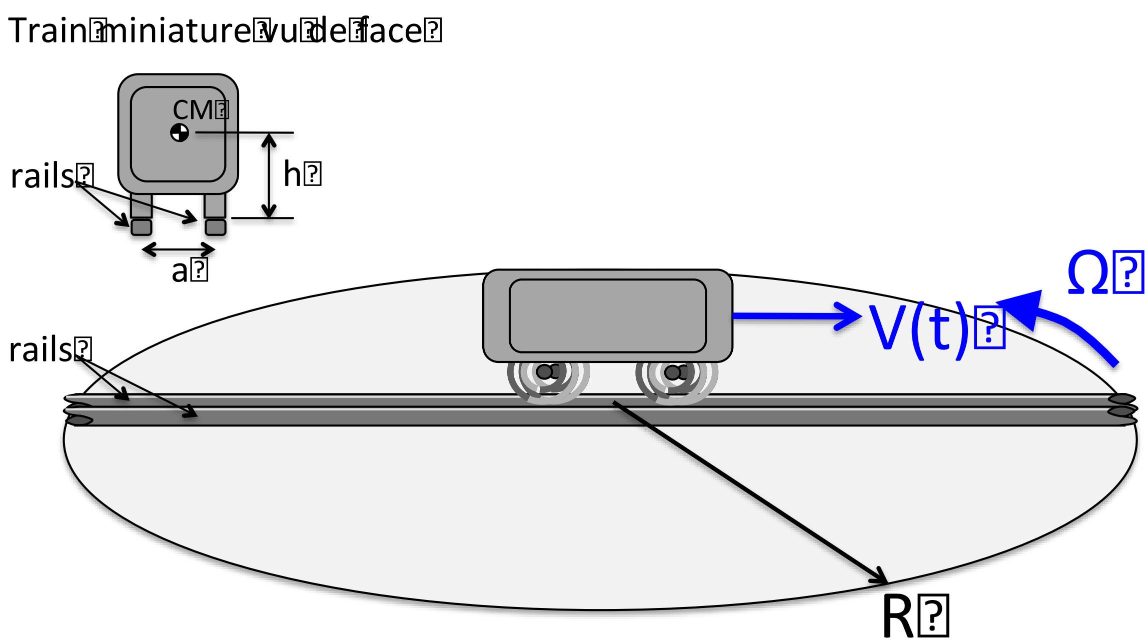
En fonction des paramètres, r, Ω, *a*, *h*, *m*, et de la gravité *g :*

A) donner la grandeur et le sens de l'accélération radiale du train en fonction de sa position radiale (5 points)

B) donner la vitesse du train en fonction de sa position radiale (5 points)

C) déterminer à quelle position radiale *r* le train se mettra à basculer sur le côté? (8 points)

D) Application numérique. Calculez la valeur de *r* obtenue en C) en utilisant les grandeurs suivantes : $\Omega = 1$ rad/s, $a = 0{,}25$ m, $h = 1$ m, $m = 10$ kg, $g = 10$ m/s^2 (2 points)

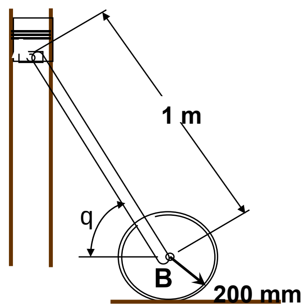


Problème 5 : Degrés de liberté de divers systèmes mécaniques (20 points)

Pour chaque système ci-dessous, indiquez son nombre de degrés de liberté et choisissez un ensemble de coordonnées généralisées qui pourrait servir à poser le lagrangien. Le nombre de coordonnées doit être minimal et suffisant pour représenter l'état du système.

Ne pas poser le lagrangien.

i) Une roue de masse M_R reliée par une tige mince à un piston de masse M_A (figure ci-dessous).



ii) Un pendule formé d'une corde attachée à un point fixe au bout de laquelle on place une boîte renfermant un gyroscope.

iii) Un camion remontant une pente à basse vitesse et traînant derrière lui un bateau monté sur une remorque à deux roues. Le point d'attache de la remorque derrière le camion permet une rotation libre.

iv) Un bras humain. Supposez que l'épaule est un point fixe permettant une rotation libre et que le poignet et la main sont droits et immobiles.