

ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2016

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-PH-A1 MÉCANIQUE CLASSIQUE

Notes importantes :

- Le questionnaire comprend cinq (5) problèmes;
- L'examen est noté sur 100 points;
- Toute documentation est permise;
- Prenez soin d'expliquer votre démarche et au besoin d'exprimer vos hypothèses, car la correction en tiendra compte;
- Les résultats numériques demandés doivent avoir les unités appropriées.

Questions à développement court: (2 questions x 10 points / question = 20 points)

- 1) Le moteur ionique de la sonde spatiale Dawn utilise une différence de potentiel pour accélérer des ions de xénon excités dans un plasma et les propulser à grande vitesse derrière elle. Sachant que la sonde possède une masse totale de 1237 kg, dont 495 kg de carburant (xénon), qu'elle éjecte au débit constant de 300 g de xénon par jour, et que sa poussée maximale est de 92 millinewtons¹, calculez la vitesse maximale atteignable par la sonde Dawn si elle accélère à partir du repos en apesanteur. Après combien de temps cette vitesse est-elle atteinte? (10 points)

- 2) Vrai ou Faux. (2 points par bonne réponse)
 - a. Dans le problème à deux corps à force centrale, le moment cinétique du système est conservé même si les trajectoires des corps sont paraboliques ou hyperboliques.
 - b. Pour toute orbite elliptique, il existe deux points d'énergie cinétique minimale, soit au périapse et à l'apoapse.
 - c. Soit un système dynamique non chaotique décrit par un Hamiltonien en une dimension formant un espace de phase (q,p) . Alors, chaque condition initiale (q_0, p_0) possible sur le système correspond à une trajectoire unique dans l'espace de phase et aucune de ces trajectoires ne se recoupe entre elles.
 - d. L'approche Lagrangienne n'est pas applicable dès qu'il existe des forces non conservatives dans un système.
 - e. Soit une bille rigide soumise à un mouvement uniformément accéléré quelconque en une dimension. La trajectoire de la particule dans l'espace de phase sera toujours de forme parabolique.

¹ Sur Terre, cela revient à 9,2 g, soit environ la poussée exercée par le poids d'une feuille de cartable.

Problème 1 : Lagrangien d'un système oscillant (20 points)

Un système est composé de deux masses identiques reliées à trois ressorts identiques tel que représenté à la figure 1 ci-dessous. Les ressorts sont au repos quand le système est immobile et en équilibre.

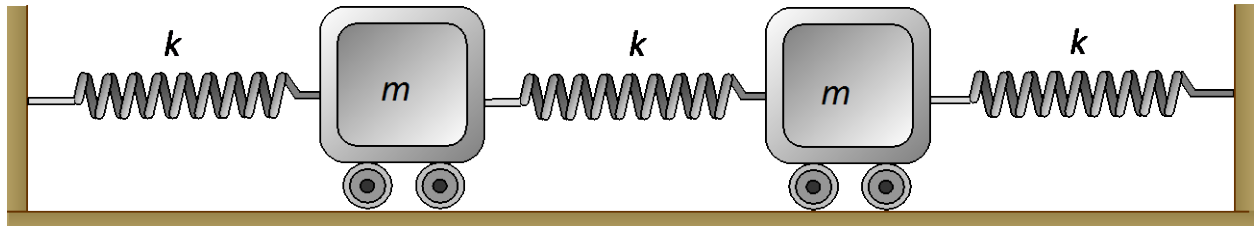


Figure 1 : Système masses-ressorts couplés

- A) Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il? (4 points)
- B) Donnez le lagrangien du système en fonction de coordonnées généralisées de votre choix (4 points)
- C) Déterminez les équations du mouvement (4 points)
- D) Calculez les fréquences propres et les modes d'oscillations propres du système (4 points)
- E) Expliquez en vos mots, et avec un schéma simple si nécessaire, le sens physique de chaque mode propre (4 points)

Problème 2 : Hamiltonien d'un mouvement hélicoïdal soumis à la gravité (20 points)

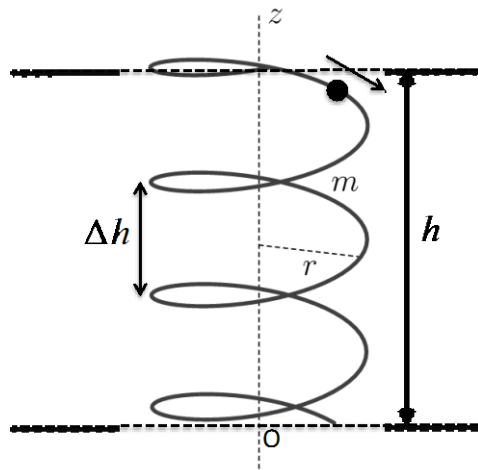


Figure 1 : Une bille enfilée sur une tige rigide hélicoïdale de rayon r constant. L'équation décrivant la forme de la tige est donnée par $z(\theta) = \frac{\Delta h}{2\pi} \theta$.

Une bille trouée est enfilée sur un fil de fer rigide formant une tige hélicoïdale de rayon constant r et décrite par l'équation

$$z(\theta) = \frac{\Delta h}{2\pi} \theta ,$$

où z est la position verticale par rapport à l'origine O , θ est la position angulaire sur l'hélice, et Δh est le pas de l'hélice (la distance verticale parcourue après un tour complet).

Au temps initial, on lâche la bille d'une hauteur h au-dessus de l'origine.

Quelques suppositions initiales :

- négligez tout frottement;
- la gravité s'exerce dans le sens des z négatifs;
- le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) formant une base droite est employé;
- le mouvement hélicoïdal se fait selon les z positifs, c'est-à-dire qu'un déplacement vers les z positifs se fait selon la règle de la main droite.

- A) Écrire l'Hamiltonien du système en utilisant la coordonnée angulaire θ et son moment conjugué p_θ . (8 points)
- B) Obtenez les équations d'Hamilton associées à votre problème. (4 points)
- C) Décrivez, à l'aide d'un schéma le plus précis possible, la trajectoire de la bille dans l'espace de phase (p_θ, θ) du moment où elle est relâchée au moment où elle passe par l'origine O . Indiquez clairement le sens de la trajectoire sur le schéma. Donnez aussi l'équation de la trajectoire de la bille dans l'espace de phase. (4 points)
- D) Calculez la grandeur de l'accélération de la bille le long du fil. (4 points)

Note : Si vous êtes incapables de procéder avec la méthode Hamiltonienne, utilisez la mécanique lagrangienne. Vous serez pénalisés de 10% sur le résultat de ce numéro pour ce changement de coefficient de difficulté.

Problème 3 : La mission sur Cérès de l'orbiteur Dawn de la NASA (20 points)

En 2007 la sonde spatiale « Dawn », un orbiteur à propulsion ionique, a été lancée par la NASA afin d'étudier les plus gros objets de la ceinture d'astéroïdes se trouvant entre mars et Jupiter. En 2011, après un long périple, la sonde est entrée en orbite autour de Vesta, le second plus gros astéroïde de la ceinture, où elle est restée jusqu'en 2012. En septembre 2012, la sonde a été lancée vers Cérès, le plus gros objet de la ceinture, souvent considéré comme une planète naine plutôt qu'un astéroïde, où elle est arrivée en orbite en mars 2015.

Dans ce problème, on vous propose d'étudier le transfert d'orbite de Vesta à Cérès et de calculer le temps de transit d'une planète à l'autre. Ce transfert d'orbite s'est effectué tel que décrit à la figure ci-dessous. Les données sont fournies par la NASA².

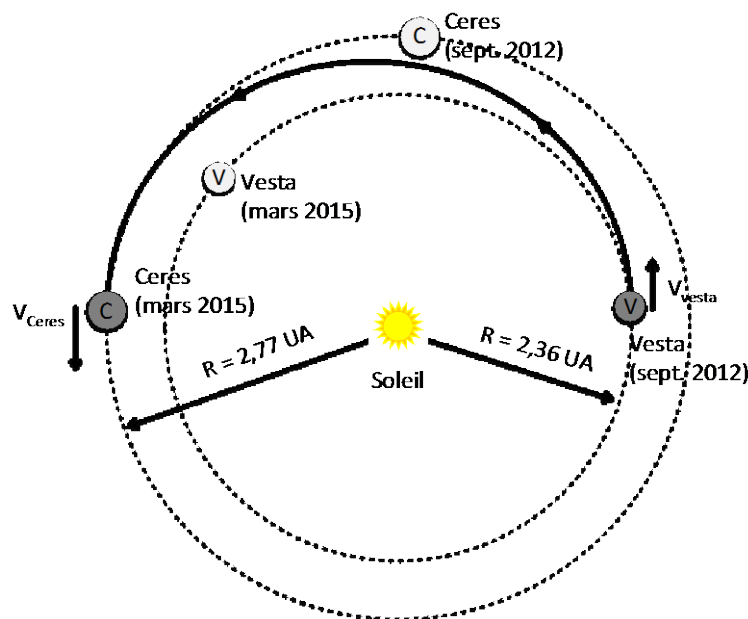


Figure 2 : Transfert d'orbite de Dawn de l'astéroïde Vesta à l'astéroïde Cérès. Dans ce problème légèrement simplifié, le départ de Vesta et l'arrivée à Cérès se font à des points diamétralement opposés sur leur orbite.

La sonde est lancée vers Cérès au temps $t = 0$ (le 5 septembre 2012). À ce moment, Cérès est aussi en déplacement. Au moment où la sonde arrive à Cérès, le 6 mars 2015, la planète naine se trouve à un point diamétralement opposé au point où se trouvait Vesta au moment du lancement³. De plus, afin de minimiser le freinage nécessaire à l'approche de Cérès, la sonde Dawn est arrivée au point de contact avec Cérès à la même vitesse que cette dernière par rapport au soleil, de sorte que la vitesse relative entre Cérès et Dawn est pratiquement nulle.

Afin de modéliser la trajectoire lors du transfert d'orbite, quelques suppositions initiales s'imposent :

² https://en.wikipedia.org/wiki/4_Vesta, Les données ont légèrement été simplifiées pour les besoins de l'examen, mais les principes de transfert demeurent les mêmes.

³ Ceci est une simplification calculatoire importante par rapport au problème réel, où Dawn doit balayer un angle d'environ $3\pi/2$ au lieu π sur son orbite avant de rejoindre Cérès. Le temps de parcours d'un angle π dans ce problème sera donc inférieur à 2,5 années.

- la vitesse de la sonde par rapport au soleil au moment du lancement est identique à celle de Vesta;
- les moteurs auxiliaires de la sonde fournissent au départ de Vesta une impulsion $\overline{Imp} = m\Delta v$ qui peut être considérée instantanée par rapport à la durée du transfert;
- l'attraction gravitationnelle de Vesta et de Cérès (de l'ordre de $0,25 \text{ m/s}^2$) peut être considérée négligeable en tout temps. Idem pour tous les autres corps du système solaire à l'exception du soleil;
- les orbites de Vesta et de Cérès sont, à toutes fins pratiques, circulaires ($\varepsilon = 0$);
- les distances de Vesta et de Cérès par rapport au soleil sont respectivement de 2,36 UA et 2,77 UA ($1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$);
- la masse de Dawn au départ de Vesta est de 1000 kg;
- la masse du soleil vaut $2 \times 10^{30} \text{ kg}$;
- la constante gravitationnelle vaut : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3/\text{s}^2$.

Questions :

- Calculez, en années, le temps de transit de Vesta à Cérès décrit à la fig. 2. (5 points)
- Calculez les vitesses tangentielles (en km/s) par rapport au soleil des planètes Vesta et Cérès. (5 points)
- Calculez la grandeur et l'orientation de l'impulsion nécessaire pour effectuer ce transfert d'orbite. (10 points)