

# ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

## SESSION DE MAI 2016

**Toute documentation permise**  
**Calculatrices : modèles autorisés seulement**  
**Durée de l'examen : 3 heures**

### 14-IN-A7 Probabilités et statistiques appliquées

#### Question n° 1 (20 points)

Un fabricant doit offrir à sa clientèle une garantie sur les moteurs de  $6 \times 10^5$  hrs (il accepte un niveau d'erreur de 5%). Un test a été effectué sur un échantillon de 10 moteurs jusqu'au bris de ce dernier. Le tableau ci-dessous indique les données.

$6.1 \times 10^5$	$7.8 \times 10^5$	$8.4 \times 10^5$	$9.2 \times 10^5$	$10.1 \times 10^5$	$11.1 \times 10^5$
$5.8 \times 10^5$	$6.5 \times 10^5$	$8.7 \times 10^5$	$9.0 \times 10^5$		

On considérant que le temps avant bris est une variable gaussienne, on vous demande :

- (7 points) Estimez la durée de vie moyenne des moteurs et son intervalle de confiance à 95%.
- (7 points) Peut-on certifier ou pas si le fabricant respecte le seuil de  $6 \times 10^5$  hrs à 95%? Justifiez votre réponse par un test statistique.
- (6 points) Pour obtenir une précision dans la prédiction de la durée de vie égale à  $\pm 1000$  hrs, quelle est la taille minimale de l'échantillon que vous devrez considérer?

#### Question n° 2 (10 points)

Ci-dessous un tableau qui résume le **nombre des jours-personnes d'absence** dans une entreprise manufacturière. Les données sont présentées en fonction de la journée de la semaine. Le dirigeant de l'entreprise soupçonne que les absences sont plus fréquentes le vendredi.

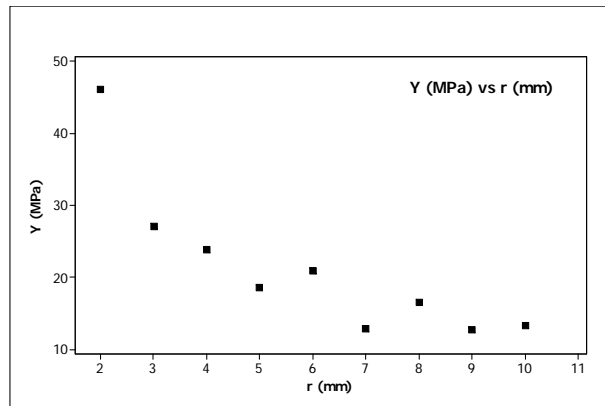
Journée	Absences : jours-personnes
Lundi	24
Mardi	23
Mercredi	31
Jeudi	19
Vendredi	56

On vous demande de tester l'hypothèse selon laquelle le nombre des absences est uniformément distribué dans la semaine (utiliser un niveau d'erreur  $\alpha = 0.05$ ).

### Question n° 3 (25 points)

Un scientifique tente de prouver que le niveau des contraintes mécaniques est inversement proportionnel au rayon de courbure d'un échantillon. Plusieurs échantillons ont été réalisés et les mesures expérimentales sont indiquées au tableau ci-dessous.

$r$ : rayon de courbure (mm)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y$ : Niveau contraintes (MPa)	46,14	27,06	23,86	18,61	20,84	12,87	16,55	12,73	13,32



On vous demande :

- (10 points) En considérant le modèle  $Y = \frac{a_1}{r} + a_0 + \varepsilon$ , où  $\varepsilon = N(0, \sigma^2)$ . On vous demande d'estimer les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  par la méthode des moindres carrés.
- (5 points) Est-ce que la valeur de  $a_0$  est significative ou peut-elle être considérée comme "pratiquement" égale à zéro? Justifiez votre réponse.
- (10 points) Calculez le coefficient de corrélation entre les deux variables  $Y$  et  $1/r$ . Est-ce qu'il peut être considéré comme "significatif"? Justifiez votre réponse en considérant la taille de l'échantillon  $n = 9$  et un seuil d'erreur  $\alpha = 0.05$ .

### Question n° 4 (20 points)

$x$  est une variable aléatoire qui peut être considéré comme normale avec une espérance unitaire ainsi qu'une variance unitaire  $x \sim N(\mu_x = a, \sigma_x^2 = 1)$ .  $Y$  est une nouvelle variable ( $x \rightarrow Y$ ) définie comme :

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (10 points) Calculer l'espérance  $E\{Y\}$  et la variance  $E\{(Y - E(Y))^2\}$  de la nouvelle variable.

- e) (10 points) Un changement de variable a été effectué  $x \rightarrow z \rightarrow U$ , tel que :  $z = (x - a)$  et,

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

On vous demande de calculer l'espérance  $E\{U\}$  et la variance  $E\{(U - E(U))^2\}$  de la nouvelle variable  $U$  :

**Question n° 5 (20 points)**

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue  $x$  (pour  $x \geq 0$ ) est donnée par :

$$f(x) = \alpha e^{-2x}$$

On vous demande :

- a) (5 points) Déterminer la valeur de  $\alpha$ .
- b) (5 points) Donnez l'expression mathématique de la fonction génératrice des moments de la variable.
- c) (5 points) Quelle est la probabilité  $P(x \leq 2)$ ?
- d) (5 points) Quelle la probabilité que, dans un échantillon de 3 valeurs de  $x$ , deux soient inférieures à 2 ?

**Question n° 6 (5 points)**

En ayant **6 différents échantillons**, combien de lots différents de 3 échantillons peut-on former?

- a) 20
- b) 54
- c) 120
- d) 108

---

**Fin du questionnaire**