ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2019

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-IN-A7 Probabilités et statistiques appliquées

Question n° 1 (15 points) – Variables aléatoires

Soit X est une variable aléatoire normale avec une espérance égale à 2 et une variance unitaire $X = N\left(\mu_x = 2, \sigma_x^2 = 1\right)$. Y est une nouvelle variable définie comme :

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2X_i\right)$$

a) (8 points) Calculez l'espérance μ_y et la variance σ_y^2 de la nouvelle variable Y en fonction de n .

b) (7 points) Un nouveau changement de variable a été effectué, tel que : $Z = \left(X - 4\right)$, on vous demande de calculer l'espérance μ_u et la variance σ_u^2 de la nouvelle variable U :

$$U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Question n° 2 (20 points) – Lois statistiques

Considérant que la variable X décrit le temps (en jour) avant défaillance d'un système électronique. On considère qu'elle suit une distribution exponentielle. Le tableau suivant regroupe un échantillon de 21 individus.

123	*42*	*18*	*63*	*137*	*59*	*49*
37	*51*	*45*	*115*	*43*	*68*	*67*
25	*190*	*39*	*100*	*58*	*92*	*187*

On vous demande :

a) (5 points) Identifiez le paramètre λ de la distribution paramétrique avec la méthode des moments :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b) (3 points) Quelle est la probabilité pour que $X \geq 80$?

c) (3 points) Quelle est la probabilité pour que $X = 40$?

d) (4 points) Quelle est la probabilité pour que $80 \leq X \leq 100$?

e) (5 points) Quel est le nombre de jours qu’on peut garantir avec un risque de défaillance qui ne dépasse pas 10% ?

Question n° 3 (15 points) - Échantillonnage

Dans un lot de 30 composants, seulement deux (2) sont défectueux. On pige **aléatoirement et sans remise**, 3 composants. On vous demande :

a) (3 points) Quelle est la probabilité qu'on obtienne 2 composants défectueux.

b) (3 points) Quelle est la probabilité que le deuxième composant soit défectueux ?

c) (3 points) Considérant que le deuxième composant était défectueux, quelle est la probabilité que le premier ne le fût pas ?

d) (3 points) Quelle est la probabilité qu’on obtienne 3 composants conformes.

e) (3 points) Quelle est la probabilité qu’on obtienne 3 composants défectueux.

Question n° 4 (15 points) – Temps d’attente

La variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^+$ décrit le temps d’attente à l’accueil d’un hôpital (en heures). On considère que X peut être modélisée par une loi exponentielle avec une espérance de 3 heures. On vous demande :

a) (5 points) Donnez les expressions mathématiques de la densité de probabilité (*PDF*) et de la fonction de répartition (*cumulative distribution function - CDF)*) régissant le temps d’attente.

b) (3 points) Déterminez la probabilité que le délai soit égal à 3 heures.

c) (3.5 points) Déterminez la probabilité que le délai soit inférieur à 1 heure.

d) (3.5 points) Déterminez la probabilité que le délai soit supérieur à 6 heures.

Question n° 5 (20 points) – Régression linéaire

On cherche à identifier le meilleur modèle de régression entre la résistance électrique de contact d’un joint R [Ohm] et la pression appliquée P [kPa]. La figure illustre 12 données expérimentales. Les valeurs des mesures expérimentales sont indiquées au tableau ci-dessous (l’erreur de mesure est estimée à ±0.1 kPa pour la pression et ±0.5 Ohm pour la résistance électrique.

P (kPa)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
R (Ohm)	62.5	56.9	52.0	48.7	45.5	41.8	37.4	33.9	30.2	27.5	24.8	22.4

On vous demande :

a) (7 points) En considérant le modèle linéaire suivant $R_{\text{mod}} = a_1 P + a_0$. On vous demande d'estimer les paramètres a_0 et a_1 par la méthode de moindres carrés.

b) (3 points) Est-ce que la valeur de a_1 est significative ? Justifiez votre réponse par un test statistique.

c) (6 points) Analyser la qualité de modèle en examinant le résidu $\varepsilon = R_{\text{mod}} - R$, l'erreur quadratique moyenne et l'erreur moyenne absolue.

d) (4 points) Calculez le coefficient de corrélation linéaire (Pearson) entre les deux variables R et P. Est-ce qu'il peut être considéré comme "significatif"? Justifiez votre réponse en considérant la taille de l'échantillon $n = 12$ et un seuil d'erreur $\alpha = 0.05$.

Question n° 6 (15 points) – Tableau de contingence

Un fabricant de lentilles en polycarbonates désire valider (ou infirmer) que l'ajout d'un additif (pigment de couleur) dans une résine n'a aucun effet sur sa résistance au rayon UV. Au total, 450 essais ont été réalisés. Un échantillon de 400 lentilles a été jugé comme conforme et 50 lentilles ont été déclarées comme non conformes. L'additif a été ajouté à 250 lentilles (200 lentilles testées n'avaient pas l'additif). Les résultats sont :

Totaux essais UV	*Avec additif*	*Sans additif*
Conformes 400	*220*	*180*
Non conformes 50	*30*	*20*

On vous demande :

a) (5 points) Formulez les hypothèses statistiques H_0 et H_a pour ce tableau de contingence.

b) (10 points) Peut-on considérer comme vraisemblable l'hypothèse selon laquelle l'ajout d'additif dans la résine modifie significativement sa résistance aux UV.

Fin du questionnaire