

# ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

## SESSION DE MAI 2018

**Toute documentation permise**  
**Calculatrices : modèles autorisés seulement**  
**Durée de l'examen : 3 heures**

### 14-IN-A7 Probabilités et statistiques appliquées

#### Question n° 1 (20 points)

Considérant que la variable  $X > 0$  suit une distribution exponentielle. Le tableau suivant regroupe 21 échantillons de  $X$  :

123,6	40,8	18,2	63,0	137,2	57,6	59,1
35,7	52,5	2,3	115,1	43,7	63,4	60,8
12,5	193,9	2,8	100,3	57,2	91,9	187,3

On vous demande :

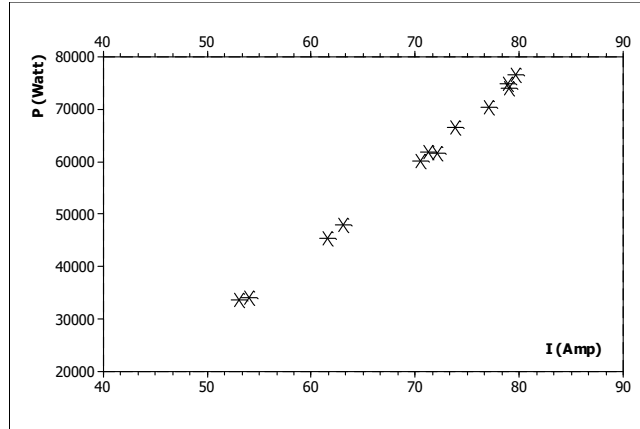
- a) (5 points) Estimez l'espérance de  $X$  ( $E\{X\}$ ).
- b) (5 points) Identifiez le paramètre  $\lambda$  de la distribution paramétrique avec la méthode des moments :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- c) (3 points) Quelle est la probabilité pour que  $X \leq 100$  ?
- d) (3 points) Quelle est la probabilité pour que  $X = 50$  ?
- e) (4 points) Quelle est la probabilité pour que  $125 \leq X \leq 150$  ?

#### Question n° 2 (20 points)

Une expérimentation a permis d'établir qu'il existe une relation entre la puissance dissipée dans un réacteur  $P$  [Watt] et le courant électriques du circuit d'alimentation  $I$  [Amp]. La figure illustre l'ensemble des données expérimentales. Les valeurs des mesures expérimentales sont indiquées au tableau ci-dessous (l'erreur de mesure est estimée à  $\pm 25$  W pour la puissance et  $\pm 0.05$  Amp pour  $I$  pour un niveau de confiance de 95%).



**Figure 1. Relation Puissance-Courant (question 1)**

$I$ (Amp)	53	54	61,5	63	70,5	71	72	74	77	79	79	80
$P$ (Watt)	33731	34155	45428	48034	60171	61790	61652	66641	70363	74770	74045	76561

On vous demande :

- (10 points) En considérant le modèle  $P = a_1 I^2 + \varepsilon$ , où  $\varepsilon = N(0, \sigma^2)$ . On vous demande d'estimer le paramètre  $a_1$  par la méthode de moindres carrés.
- (3 points) Est-ce que la valeur de  $a_1$  est significative ? Justifiez votre réponse par un teste statistique.
- (7 points) Calculez le coefficient de corrélation linéaire (Pearson) entre les deux variables  $P$  et  $I$  (attention :  $I$  et pas  $I^2$ ). Est-ce qu'il peut être considéré comme "significatif"? Justifiez votre réponse en considérant la taille de l'échantillon  $n = 12$  et un seuil d'erreur  $\alpha = 0.05$ .

### Question n° 3 (15 points)

Soit  $X$  est une variable aléatoire normale avec une espérance égale à 3 et une variance unitaire  $X = N(\mu_x = 3, \sigma_x^2 = 1)$ .  $Y$  est une nouvelle variable définie comme :

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

- (8 points) Calculez l'espérance et la variance de la nouvelle variable  $Y$  en fonction de  $n$ .
- (7 points) Un changement de variable a été effectué, tel que :  $Z = (X - 3)$ , on vous demande de calculer l'espérance et la variance de la nouvelle variable :

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

**Question n° 4 (10 points)**

Le temps d'attente d'une transaction peut être modélisé par une loi exponentielle avec une espérance mathématique de 2 minutes. On vous demande :

- a) (3 points) Donnez l'expression mathématique de la densité de probabilité régissant le temps d'attente.
- b) (4 points) Déterminez la probabilité que le délai soit égal à 2 minutes.
- c) (4 points) Déterminez la probabilité que le délai soit inférieur à 2 minutes.
- d) (4 points) Déterminez la probabilité que le délai soit supérieur à 6 minutes.

**Question n° 5 (10 points)**

Dans un lot de 45 composants, cinq (5) sont défectueux. On pige aléatoirement et **sans remise**, 3 composants parmi les 45. On vous demande :

- a) (4 points) Estimez la probabilité qu'on obtienne 2 composants non conformes.
- b) (3 points) Quelle est la probabilité que le deuxième composant soit non conforme ?
- c) (3 points) Considérant que le deuxième composant était non conforme, quelle est la probabilité que le premier ne le fût pas ?

**Question n° 6 (15 points)**

Supposons qu'il existe deux méthodes de fabrication (A et B) pour un produit et que ces deux méthodes génèrent des défauts de type 1 et 2. Nous voulons savoir s'il existe une relation significative entre la méthode employée et le type de défauts rencontrés. Les données sont résumées dans une table de contingence.

	Méthode A	Méthode B	
Défaut 1	$F_0=20$	$F_0=35$	Tot. = 55
Défaut 2	$F_0=20$	$F_0=15$	Tot. = 35

On vous demande :

- a) (5 points) Formulez les hypothèses statistiques  $H_0$  et  $H_a$  pour ce tableau de contingence.
- b) (10 points) Peut-on considérer comme vraisemblable l'hypothèse selon laquelle la méthode employée n'a pas d'influence sur le type de défaut ? Justifiez votre réponse par un test statistique.

**Question n° 7 (10 points)**

Vous devez comparer les performances d'un fournisseur. Une campagne de mesures sur deux différents échantillons a été menée pour obtenir les statistiques suivantes :

	<b><u>Fournisseur</u></b>
Taille de l'échantillon n	125
Moyenne estimée	49.7
Écart type estimé	2.60
Valeur maximale mesurée	53.8
Valeur minimale mesurée	46.3

On vous demande :

- a) (10 points) Si le requis est de  **$50 \pm 5$** , quelle est le pourcentage des non-conformités de ce fournisseur?

**Fin du questionnaire**