ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2015

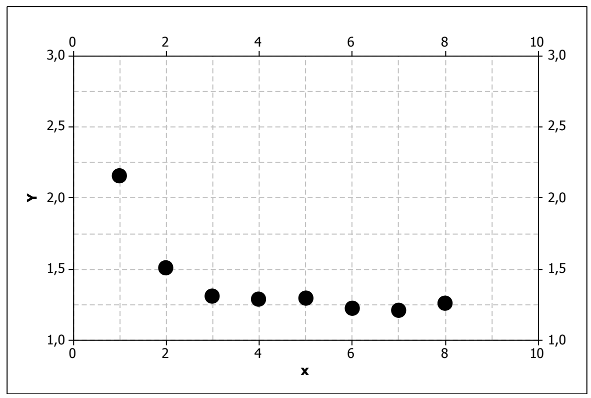
Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-IN-A7 Probabilités et statistiques appliquées

Question n° 1 (30 points)

On cherche à identifier une relation empirique $Y = f(X)$. Huit $(n = 8)$ expériences ont été menées pour différentes valeurs de X et Y (voir tableau et graphique).

X	Y	X	Y
1.00	2,155	5.00	1,293
2.00	1,507	6.00	1,219
3.00	1,307	7.00	1,204
4.00	1,284	8.00	1,253



On vous demande :

a) (10 points) En considérant le modèle empirique :

$$Y' = a_0 + \frac{a_1}{1+X} + \varepsilon$$

Où ε est un bruit gaussien de moyenne nulle. On vous demande de d'estimer les paramètres a_0 et a_1 par la méthode des moindres carrés.

b) (5 points) En considérant un changement de variable :

$$V = \frac{1}{1+X}$$

On vous demande de calculer le coefficient de corrélation linéaire (coefficient de *Pearson*) entre V et Y'.

c) (5 points) Est-ce que ce dernier coefficient peut être considéré comme "significatif"? Justifiez votre réponse en considérant la taille de l'échantillon $n = 8$ et un seuil d'erreur $\alpha = 0.05$.

d) (5 points) Est-ce que la valeur de a_0 est significative ? Ou peut-elle être considérée comme "pratiquement" égale à zéro? Justifiez votre réponse.

e) (5 points) On considérant une nouvelle variable : $e = Y - Y'$, on vous demande d'effectuer le test d'hypothèse :

$$H_0 : \mu_e = 0$$

$$H_A : \mu_e \neq 0$$

Question n° 2 (10 points)

X est une variable aléatoire qui peut être considérée comme normale avec une espérance nulle et une variance égale à 0.01 rad^2.

$$X \sim N\left(\mu_X = 0, \sigma_X^2 = 0.01\right)$$

Y est une nouvelle variable définie comme:

$$Y = 2(X + 10)$$

a) (6 points) Calculer l'espérance et la variance de la nouvelle variable Y.

b) (4 points) Quelle la distribution de la nouvelle variable Y ? Donnez l'expression mathématique et le demain d'application.

Question n° 3 (20 points)

Une recherche scientifique vise à démontrer un lien entre l'exposition à l'amiante chrysotile et le taux des maladies respiratoires (amiantose, cancer du poumon, etc.). Une étude statistique a été effectuée sur 840 personnes. Les résultats ont été classés en trois catégories en fonction du degré d'exposition. Les résultats sont présentés :

Profil	Absence de pathologie	Présence de pathologie	Total
Jamais exposé	545	12	**557**
Exposé occasionnel	154	19	**173**
Exposé en continu	75	35	**110**
Total	**774**	**66**	**840**

On vous demande :

a) (5 points) On émet l'hypothèse que le taux des maladies respiratoires est lié à l'exposition à l'amiante. Formulez les hypothèses statistiques H_0 et H_a pour ce tableau de contingence.

b) (8 points) Peut-on considérer comme vraisemblable l'hypothèse selon laquelle peu importe le degré d'exposition, ceci présente un réel un risque pour la santé. Justifiez votre réponse. Utilisez un seuil de 5% pour l'erreur TYPE I

c) (7 points) Est-ce qu'il existe une différence significative entre le fait d'être exposé occasionnellement ou en continue ? Justifiez votre réponse par un test statistique.

Question n° 4 (20 points)

Un lot contient 30 composants dont 10 sont de **catégorie A** et 20 de **catégorie B**. On pige (au hasard et sans remise) $n = 3$ composants dans ce lot.

a) (4 points) Calculez la probabilité d'obtenir 2 composants de **catégorie A** dans ce lot.

b) (6 points) Si le premier composant pigé n'est pas de **catégorie A**, quelle est la probabilité que les deuxième et troisième composants pigés (toujours au hasard et sans remise) soit de **catégorie B** ?

c) (5 points) Calculez la probabilité d'obtenir 5 composants de **catégorie B** dans un lot de taille $n = 5$.

d) (5 points) Calculez la probabilité d'obtenir 2 composants de **catégorie A** ET 3 composants de **catégorie B** dans ce dernier lot ($n = 5$).

Question n° 5 (20 points)

Une variable aléatoire continue possède une distribution à un seul paramètre ($\lambda \geq 0$) selon la loi suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 5 \\ 0 & x < 5 \end{cases}$$

Pour identifier la valeur $\lambda \geq 0$ une campagne d'échantillonnage a été produite. Ci-dessous le tableau qui contient les valeurs d'un échantillon de $n = 20$ données.

5,95	5,31	5,75	5,48	6,75
6,37	5,05	5,02	6,70	5,59
6,17	6,29	5,15	5,14	5,75
5,50	5,83	5,03	7,27	5,54

On vous demande :

a) (6 points) D'identifier avec la méthode de moments statistique la valeur de $\lambda \geq 0$.

b) (4 points) Calculer l'espérance mathématique de la variable X.

c) (2 points) Calculer $\Pr(x \geq 4)$.

d) (2 points) Calculer $\Pr(x \leq 3)$.

e) (2 points) Calculer $\Pr(x > 2\alpha \mid x \geq \alpha)$.

f) (2 points) Calculer $\Pr(x = 6)$.

g) (2 points) Calculer $\Pr(x \geq 6)$.

Fin du questionnaire