

ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2013

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

98-Ind-B1 Probabilités et statistiques appliquées

Question n° 1 (20 points)

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue x (pour $x \geq x_0$) est donnée par :

$$f_x(x) = \alpha e^{-\alpha(x-x_0)}$$

Avec $\alpha > 0$. On vous demande :

- a) (5 points) Calculez $P[X = x_0] + P[X > 2x_0]$
- b) (5 points) Calculez $P[X > 3x_0 | X \geq 2x_0]$
- c) (5 points) Quelle est l'espérance statistique de la variable aléatoire $Y = |X|$?
- d) (5 points) Si on définit une nouvelle variable aléatoire $Z = X$, calculer $f_z(z)$

Question n° 2 (10 points)

En principe, la distribution des sexes dans une société suit la loi 50% mâles - 50% femelles. Un échantillon de 750 individus a été recensé d'une manière aléatoire et non biaisé dans une ville. Les résultats sont :

<i>Total</i>	<i>Mâles</i>	<i>Femelles</i>
750	400	350

On vous demande :

- a) (5 points) Formulez les hypothèses statistiques H_0 et H_a pour ce tableau de contingence.
- b) (5 points) Peut-on considérer comme vraisemblable l'hypothèse selon laquelle le sexe de la population dans cette ville est réparti selon la loi 50%-50%? Justifiez votre réponse.

Question n° 3 (20 points)

Une expérimentation a permis d'établir qu'il existe une relation entre la puissance dissipée dans un réacteur (P en Watt) et le courant électriques du circuit d'alimentation (I en Amp). La figure illustre l'ensemble des données expérimentales. Les valeurs numériques des mesures expérimentales sont indiquées au tableau ci-dessous (erreur est estimée à ± 0.2 W pour la puissance et ± 0.02 Amp pour I pour un niveau de confiance de 95%).

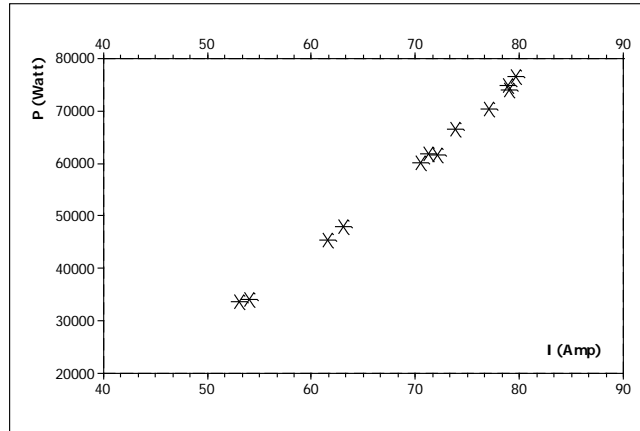


Figure 1. Relation Puissance-Courant (question 1)

I (Amp)	53	54	61,5	63	70,5	71	72	74	77	79	79	80
P (Watt)	33731	34155	45428	48034	60171	61790	61652	66641	70363	74770	74045	76561

On vous demande :

- (8 points) En considérant le modèle $P = a_0 + a_1 I^2 + \varepsilon$, où $\varepsilon = N(0, \sigma^2)$. On vous demande d'estimer les paramètres a_0 et a_1 par la méthode des moindres carrés.
- (5 points) Est-ce que la valeur de a_0 est significative ou peut-elle être considérée comme "pratiquement" égale à zéro? Justifiez votre réponse.
- (7 points) Calculez le coefficient de corrélation (Pearson) entre les deux variables P et I (attention : I et pas I^2). Est-ce qu'il peut être considéré comme "significatif"? Justifiez votre réponse en considérant la taille de l'échantillon $n=12$ et un seuil d'erreur $\alpha = 0.05$.

Question n° 4 (15 points)

X est une variable aléatoire qui peut être considéré comme normale avec une **espérance unitaire** ainsi qu'une **variance unitaire** $X = N(\mu_x = 1, \sigma_x^2 = 1)$. Y est une nouvelle variable définie comme :

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

- (8 points) Calculer l'espérance et la variance de la nouvelle variable Y .

- b) (7 points) Un changement de variable a été effectué, tel que : $Z = (X - 1)$, on vous demande de calculer l'espérance et la variance de la nouvelle variable :

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

Question n° 5 (15 points)

Un lot de 60 composants, donc 2 sont défectueux. On pige aléatoirement et sans remise, 3 composants parmi les 60.

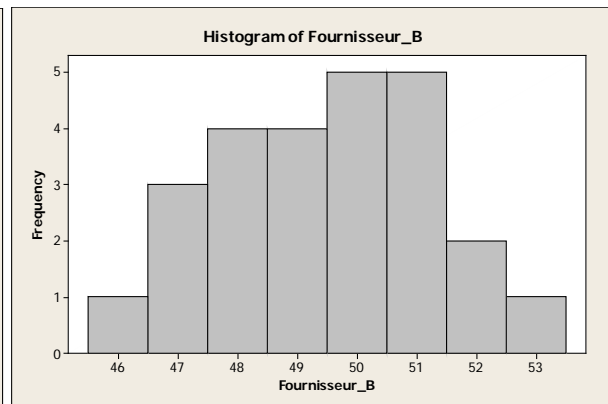
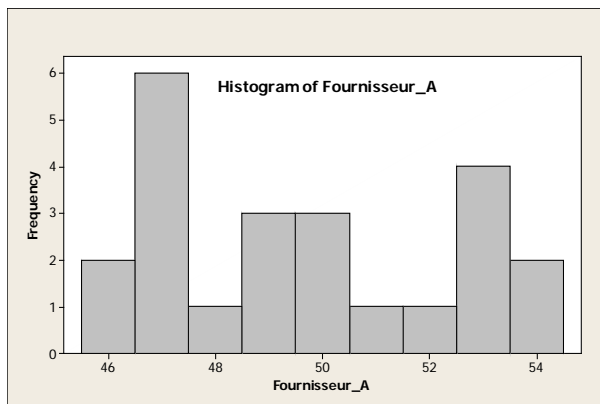
On vous demande :

- c) (5 points) Estimez la probabilité que l'on obtient 2 composants non-conformes.
- d) (5 points) Quelle est la probabilité que le deuxième composant soit non-conforme ?
- e) (5 points) Considérant que le deuxième composant était non-conforme, quelle est la probabilité que le premier ne l'était pas ?

Question n° 6 (15 points)

Vous devez comparer les performances de deux fournisseurs A et B. Une campagne de mesures sur deux différents échantillons a été menée pour obtenir les statistiques suivantes :

	Fournisseur A	Fournisseur B
Taille de l'échantillon n	125	25
Moyenne estimée	49.7	49.4
Écart type estimé	2.60	2.33
Valeur maximale mesurée	53.8	53.0
Valeur minimale mesurée	46.3	46.6



On vous demande :

- a) (5 points) Est-ce que le comportement moyen des deux fournisseurs est identique? Appuyez votre réponse par des tests statistiques et une analyse (formuler les hypothèses nulle H_0 et alternative H_A).

- b) (5 points) Est-ce que les niveaux de variation (dispersion) peuvent être considérés comme égaux? Justifiez votre réponse par un test statistique analyse (formuler les hypothèses nulle H_0 et H_A).
- c) (5 points) En examinant le requis (**50±5**), quelle fournisseur offre un meilleur comportement? Justifiez votre réponse en estimant le niveau de défauts qui sera produit par chaque machine.

Question n° 7 (5 points)

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue x (pour $x \geq 0$) est donnée par :

$$f(x) = \alpha e^{-2x}$$

On vous demande :

- a) (5 points) Déterminer la valeur de α .

Fin du questionnaire