

# ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

## SESSION NOVEMBRE 2015

**Toute documentation permise**  
**Calculatrices : modèles autorisés seulement**  
**Durée de l'examen : 3 heures**

### 14-IN-A7 Probabilités et statistiques appliquées

#### Question n° 1 (10 points)

Le délai d'attente  $X$  (en minutes) pour obtenir un support informatique au ministère des Finances est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle avec une espérance  $E\{X\}$  égale à 10 min :

On vous demande :

- a) (4 points) Donnez l'expression mathématique de la densité de probabilité régissant le temps d'attente.
- b) (2 points) Déterminez la probabilité que le délai soit égal à 10 minutes.
- c) (2 points) Déterminez la probabilité que le délai soit inférieur à 3 minutes.
- d) (2 points) Déterminez la probabilité que le délai soit supérieur à 2 fois l'espérance mathématique.

#### Question n° 2 (15 points)

En principe, l'ajout d'un additif (pigment de couleur) dans une résine n'a aucun effet sur sa résistance au rayon UV. Au total, 1750 essais ont été réalisés. Un échantillon de 750 individus a été jugé comme conforme et 1000 individus ont été déclarés comme non conformes. L'additif a été ajouté à 969 individus (781 individus testés n'avaient pas l'additif). Les résultats sont :

<i>Totaux essais</i>	<i>Avec additif</i>	<i>Sans additif</i>
<i>Conforme 750</i>	<i>419</i>	<i>331</i>
<i>Non conforme 1000</i>	<i>550</i>	<i>450</i>

On vous demande :

- a) (5 points) Formulez les hypothèses statistiques  $H_0$  et  $H_a$  pour ce tableau de contingence.
- b) (10 points) Peut-on considérer comme vraisemblable l'hypothèse selon laquelle l'ajout d'additif dans la résine modifie significativement sa résistance aux UV.

**Question n° 3 (20 points)**

Un fournisseur vous envoie un lot de 100 000 pilules. Vous voulez contrôler le poids. Le requis est de  $50 \pm 2$  mg. Avec un échantillon de taille égale à 500 pilules et tirée au hasard, vous avez estimé que la moyenne est égale à  $49,750 \pm 0,027$  mg et que l'écart type de cet échantillon est égal à  $0,750 \pm 0,017$  mg :

En considérant le poids suit une distribution gaussienne, on vous demande :

- (4 points) Déterminez la probabilité que le poids soit inférieur à 48 mg.
- (4 points) Déterminez la probabilité que le poids soit supérieur à 52 mg.
- (4 points) Déterminez la probabilité que le poids d'une pilule soit situé à l'intérieur de la tolérance (requis).
- (4 points) Déterminer le nombre des pilules non conformes qu'on s'attend à voir sur un lot de taille d'un million de pilules 1 000 000 (DPMO).
- (4 points) Quelle est l'expression mathématique de la densité de probabilité régissant le poids de 100 pilules ?

**Question n° 4 (20 points)**

Un fournisseur d'ampoules LED vous assure une durée de vie minimale de 15 000 heures de fonctionnement (avec un risque de 5%). Vous avez testé un échantillon de 15 ampoules jusqu'à leur bris. Les résultats de leurs durées de vie (en heures) sont les suivants :

21979	11178	22524	24005	27620	25346
24456	19596	20322	39720	56213	32782
55943	13085	14998			

On vous demande :

- (5 points) Estimez l'espérance  $E\{x\}$  de la durée de vie des ampoules et son intervalle de confiance à 95%.
- (5 points) Pour obtenir une précision dans la prédiction de la durée de vie égale à  $\pm 1000$  heures, quelle est la taille minimale du test que vous devrez considérer?
- (10 points) Peut-on certifier que le fournisseur respecte le seuil de 15 000 heures à 95%? Considérez une distribution du type :

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{E\{x\}} e^{-\frac{(x-10000)}{E\{x\}}} & x > 10000 \\ 0 & x \leq 10000 \end{cases}$$

**Question n° 5 (20 points)**

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue  $X$  (pour  $X \geq x_0$ ) est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x-x_0)} & x > x_0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases}$$

Avec  $\alpha > 0$  et  $x_0 > 0$ . On vous demande :

- a) (5 points) Calculez  $P[X = x_0] + P[X > 2x_0]$
- b) (5 points) Calculez  $P[X > 3x_0 | X \geq x_0]$
- c) (5 points) Quelle est l'espérance statistique de la variable aléatoire  $Y = |X| + \pi$  ?
- d) (5 points) Si on définit une nouvelle variable aléatoire  $Z = X - x_0$ , calculer  $f_Z(z)$ .

**Question n° 6 (15 points)**

Une étude de corrélation linéaire entre le **X** et **Y** a été effectuée sur un échantillon non biaisé. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

$X$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Y$	10,00	10,32	11,16	11,48	11,79	11,96	12,12	12,21

On vous demande :

- a) (10 points) En considérant le modèle  $\mathbf{Y} = a_1 \mathbf{X} + a_0 + \varepsilon$ , où  $\varepsilon = N(0, \sigma^2)$ . On vous demande d'estimer les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  par la méthode des moindres carrés.
- b) (5 points) Commentez la qualité du modèle obtenu. Est-ce qu'il est un bon modèle ? Pourquoi ?

---

**Fin du questionnaire**