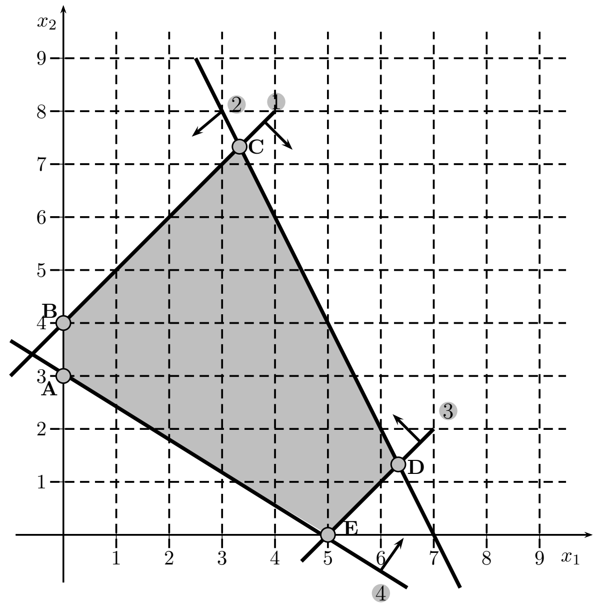
ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION AUTOMNE 2019

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures
Répondre sur le questionnaire

Question no 1 (14 points)

Soit un programme linéaire dont le domaine des solutions admissibles est représenté sur la figure suivante.

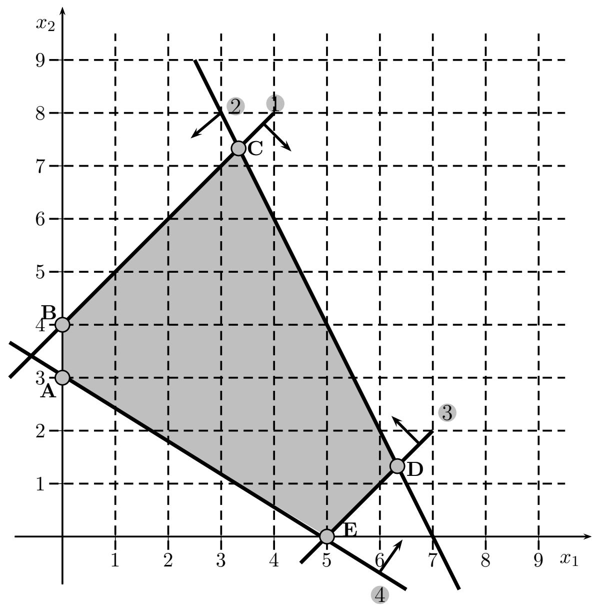


(a) (10 points)

Donnez toutes les contraintes associées à ce domaine des solutions admissibles.

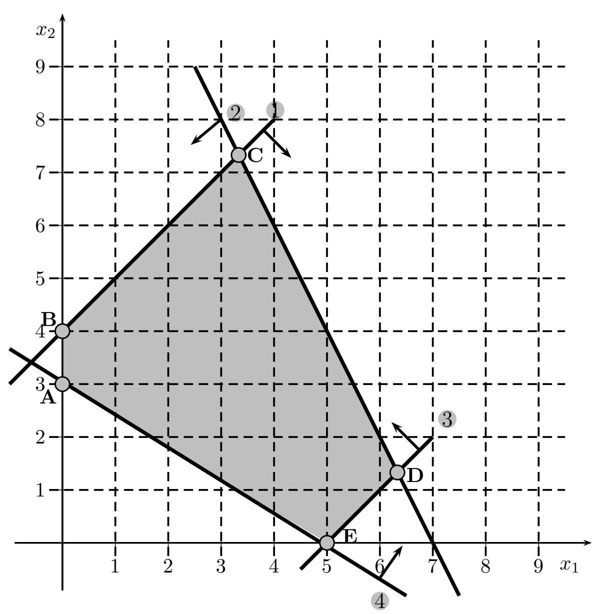
(b) (2 points)

Si la fonction-objectif est max $Z = 2x_1 + x_2$, trouvez la solution optimale.



(c) (2 points)

Si x_1 et x_2 sont définies comme des variables entières et que la fonction-objectif est max $Z = 3x_1 + 2x_2$, trouvez la solution optimale.



Question no 2 (20 points)

Une entreprise de fabrication de poutres doit se procurer 60 tonnes d'un alliage particulier. Dans son appel d'offre, l'entreprise exige que l'alliage contienne entre 0.30% et 0.50% de silicium (Si), pas plus de 0.07% de sulfure (Su), pas plus de 0.045% de phosphore (Ph) et entre 0.5% et 1.25% de carbone (C).

Un fournisseur pourrait produire cet alliage à partir de sept matières premières (P1, ..., P7). Le tableau qui suit indique, pour chacune des matières premières, le pourcentage de silicium (Si), de sulfure (Su), de phosphore (Ph) et de carbone (C) par tonne. De plus, on indique pour chacune des matières premières le nombre de tonnes disponibles et les coûts en $/tonne.

Matière première	Si %	Su %	Ph %	C %	Disponibilité tonnes	Coût $/tonne
P1	95	0.011	0.003	0	22	320
P2	89	0.003	0.002	0	29	290
P3	0	0.013	0.015	3.0	30	210
P4	0	0.008	0.001	2.5	30	270
P5	0	0.013	0.065	0	50	160
P6	0	0.002	0.008	1.2	45	210
P7	0	0.002	0.015	89	25	170

Le fournisseur veut déterminer la combinaison la moins coûteuse de matières premières pour produire l'alliage répondant aux besoins de fabricant de poutres.

(a) (14 points)

Donnez un modèle de programmation linéaire pour ce problème.

(b) (3 points)

P1 et P2 sont des matières premières similaires. La fonderie souhaiterait qu'une seule de ces deux matières premières soit utilisée dans la fabrication de l'alliage. Indiquez comment on doit modifier le programme linéaire trouvé en (a) afin de tenir compte de cette nouvelle contrainte.

(c) (3 points)

Remarque: *Cette sous-question est indépendante des sous-questions (a) et (b).*

Soit y_A, y_B, y_C et y_D quatre variables binaires représentant quatre événements notés A, B, C et D. Si l'événement A se réalise et l'événement B ne se réalise pas, alors l'événement C et l'événement D doivent se réaliser. En utilisant les variables binaires, indiquez une ou des contraintes qui permettraient de modéliser cette situation.

Question no 3 (11 points)

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3} \\
\multicolumn{3}{l}{\text{sous les contraintes :}} \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 8 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 11 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) (10 points)

Utilisez l'algorithme du simplexe afin de résoudre ce programme linéaire.

(b) (1 point)

Indiquez si la solution trouvée en (a) est unique ? Justifiez votre réponse.

Question no 4 (15 points)

Soit le modèle de programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lcll} \max\ Z = 45x_1 + 30x_2 + 60x_3 & & & \\ \text{sous les contraintes :} & & & \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 80 & (1) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 140 & (2) \\ x_1 & \geq & 30 & (3) \\ x_2 & \geq & 30 & (4) \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

La solution optimale du programme linéaire est présentée dans le tableau du simplexe suivant. Les variables e_1, e_2, e_3 et e_4 représentent les variables d'écart et de surplus utilisées dans chacune des contraintes et les variables a_3 et a_4 sont les variables artificielles utilisées dans les contraintes 3 et 4. La constante M utilisée dans le tableau représente une très grande valeur.

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	a_4	Valeur
Z	1	0	0	30	45	0	0	M	15	M-15	3150
e_3	0	0	0	2	1	0	1	-1	1	-1	20
e_2	0	0	0	-1	-2	1	0	0	-1	1	10
x_1	0	1	0	2	1	0	0	0	1	-1	50
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	30

(a) (5 points)

Écrivez la formulation duale de ce problème.

(b) (5 points)

Si la valeur du coefficient de x_1 dans la fonction-objectif (i.e. $c_1 = 45$) diminue de 5 unités (i.e. $c_1 = 40$), est-ce que la solution actuelle demeure optimale? Justifiez votre réponse.

min $W = 80y_1 + 140y_2 + 30y_3 + 30y_4$
sous les contraintes :

$$\begin{array}{lcll} y_1 + 2y_2 + y_3 & \geq & 45 & (1) \\ y_1 + \ y_2 \quad + y_4 & \geq & 30 & (1) \\ 2y_1 + 3y_2 & \geq & 60 & (3) \\ y_1, y_2, & \geq & 0 & (4) \\ y_3, y_4, & \leq & 0 & (5) \end{array}$$

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	a_4	Valeur
Z	1	0	0	30	45	0	0	M	15	M-15	3150
e_3	0	0	0	2	1	0	1	-1	1	-1	20
e_2	0	0	0	-1	-2	1	0	0	-1	1	10
x_1	0	1	0	2	1	0	0	0	1	-1	50
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	30

(c) (5 points)

Si le membre de droite de la quatrième contrainte ($b_4 = 30$) augmente de 15 unités (i.e. $b_4 = 45$), quel sera l'impact sur la valeur des variables ainsi que sur la valeur de Z.

$$
\begin{array}{llrrl}
\multicolumn{5}{l}{\min\ W = 80y_1 + 140y_2 + 30y_3 + 30y_4} \\
\multicolumn{5}{l}{\text{sous les contraintes :}} \\
y_1 + 2y_2 + y_3 & & \geq & 45 & (1) \\
y_1 + \ \ y_2 & + y_4 & \geq & 30 & (1) \\
2y_1 + 3y_2 & & \geq & 60 & (3) \\
 & y_1, y_2, & \geq & 0 & (4) \\
 & y_3, y_4, & \leq & 0 & (5)
\end{array}
$$

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	a_4	Valeur
Z	1	0	0	30	45	0	0	M	15	M-15	3150
e_3	0	0	0	2	1	0	1	-1	1	-1	20
e_2	0	0	0	-1	-2	1	0	0	-1	1	10
x_1	0	1	0	2	1	0	0	0	1	-1	50
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1	30

Question no 5 (8 points)

On souhaite affecter quatre tâches à quatre machines. Le tableau suivant indique le temps de fabrication en minutes si la tâche J_j est affectée à la machine M_i.

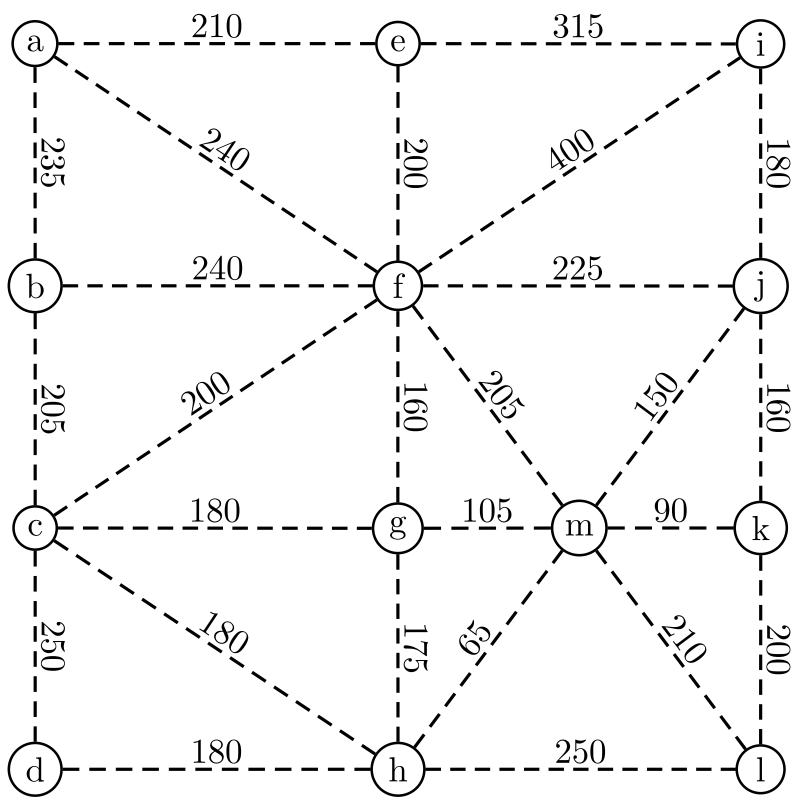
Tâches	Machines			
	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	19	11	15	13
M_2	16	10	16	11
M_3	17	9	14	12
M_4	16	13	15	11

À quelle machine doit-on affecter chaque tâche afin de minimiser le temps total de fabrication ?

Question no 6 (32 points)

(a) (10 points)

Une municipalité refait l'aménagement d'un de ses parcs. On souhaite installer un système d'irrigation. Le graphe qui suit schématise un système d'irrigation potentiel. Les noeuds du graphe indiquent l'emplacement où seront installés les gicleurs, alors que les arêtes représentent des liens potentiels où les tuyaux pourraient être installés pour acheminer l'eau à chaque gicleur. Le nombre au-dessus de chaque arête indique la distance en mètre entre deux gicleurs. Sachant que le coût des tuyaux en polymère est de 20$/m, trouvez l'ensemble des arêtes que l'on doit conserver afin d'acheminer l'eau à coût minimum à chaque gicleur.

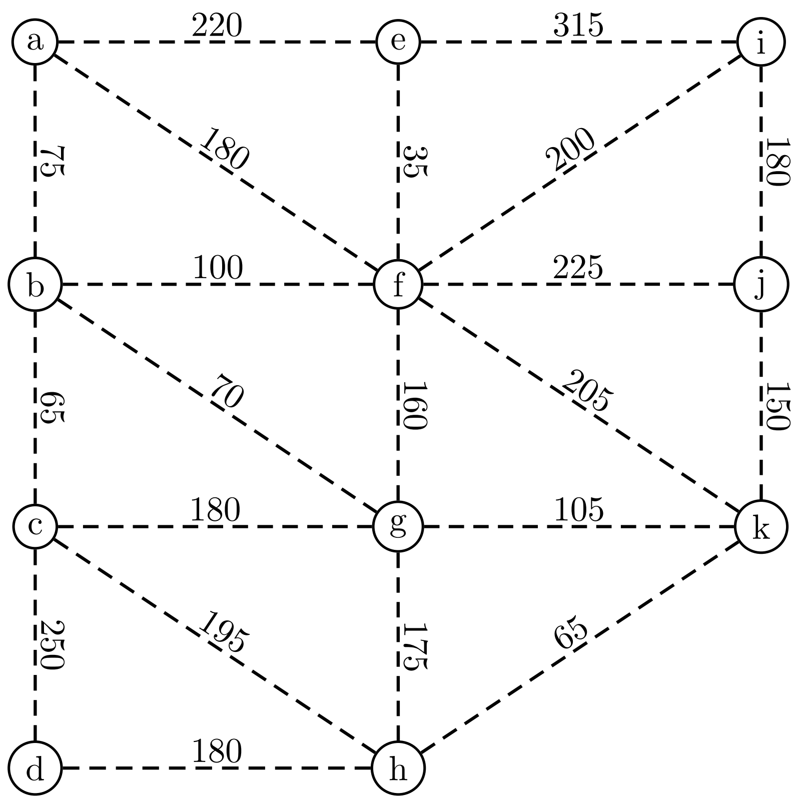


(b) (2 points)

Est-ce que cette solution optimale est unique ? Justifiez votre réponse.

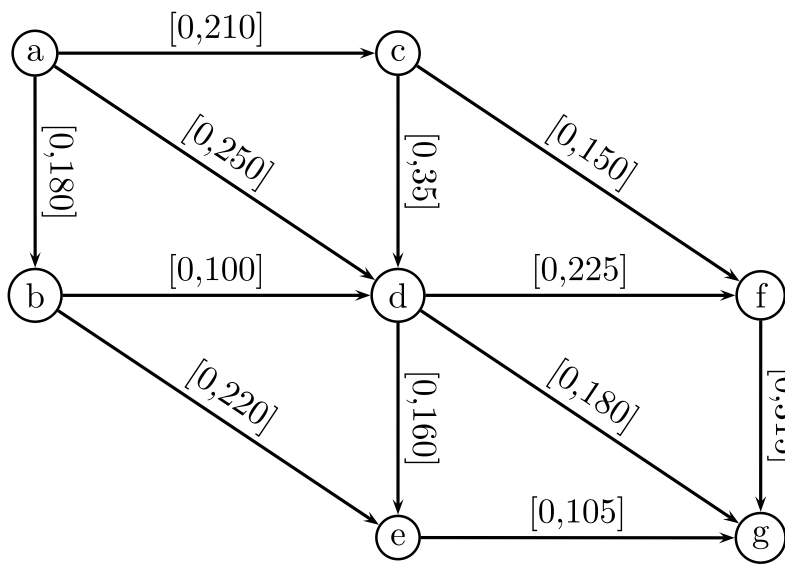
(c) (10 points)

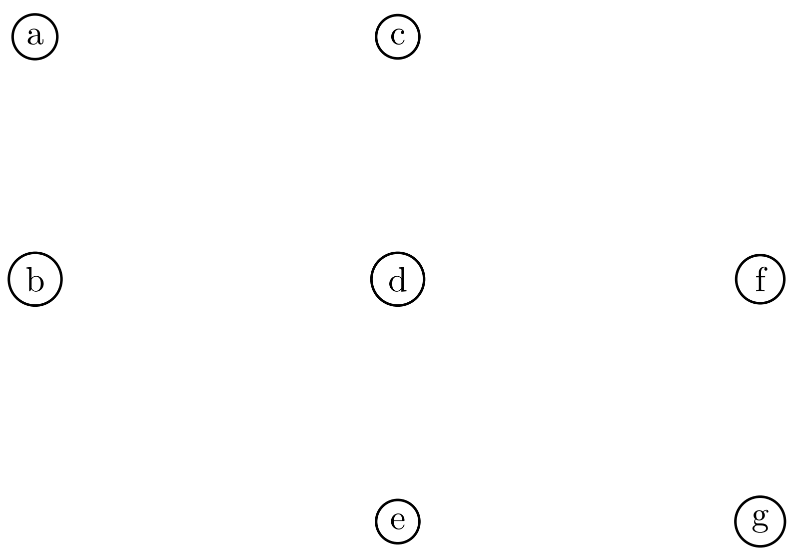
Trouvez le plus court chemin entre le noeud ⓐ et tous les autres nœunds du graphe.

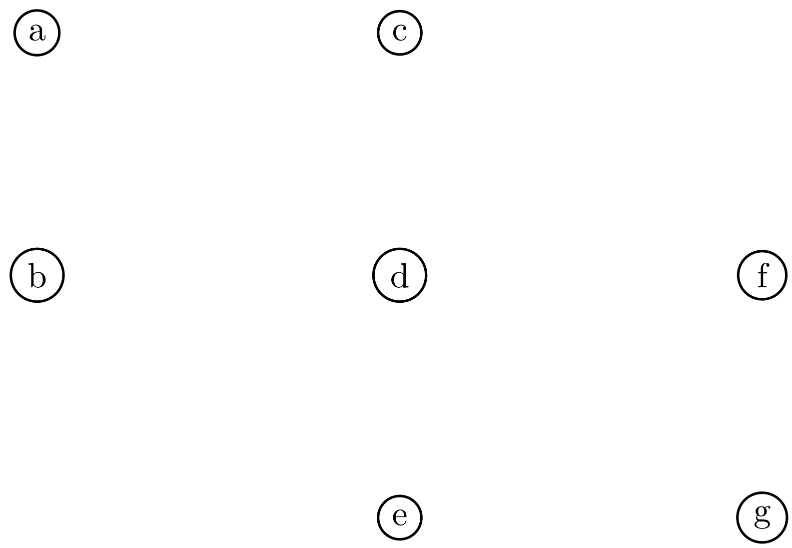


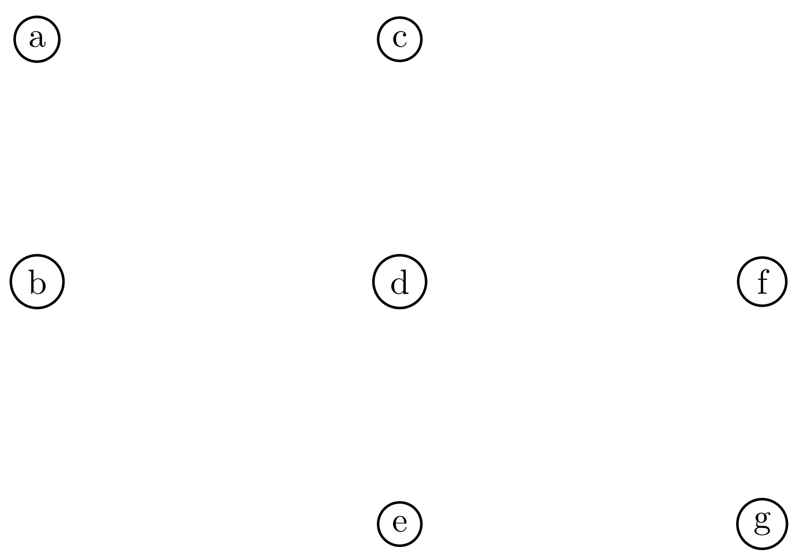
(d) (10 points)

Dans le graphe qui suit, les valeurs $l_{\alpha,\beta}$ et $u_{\alpha,\beta}$, apparaissant sous la forme $[l_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta}]$ au-dessus de chaque arc, représentent les capacités minimale et maximale de flot qui peuvent circuler sur chaque arc. Donnez le flot maximum qui peut circuler dans le réseau entre le noeud **a** et le noeud **g**.






a
c
b
d
f
e
g


a
c
b
d
f
e
g