ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2018

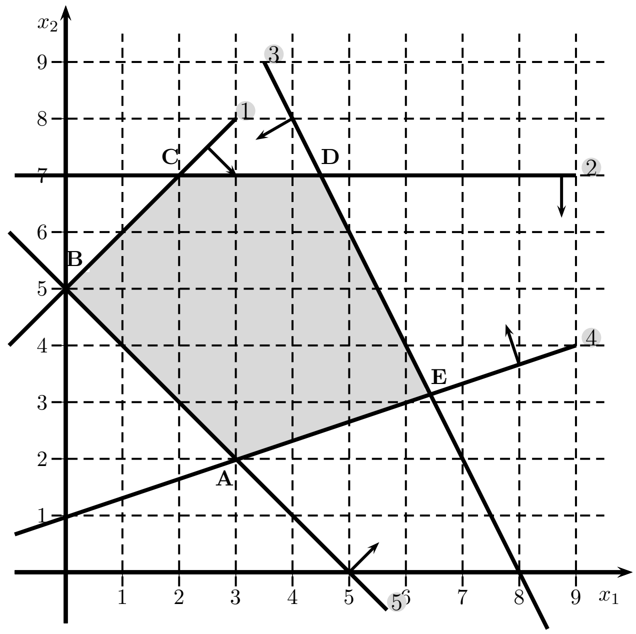
Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-IN-A1 RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

NOTE :
MERCI DE RÉPONDRE DIRECTEMENT SUR LE QUESTIONNAIRE

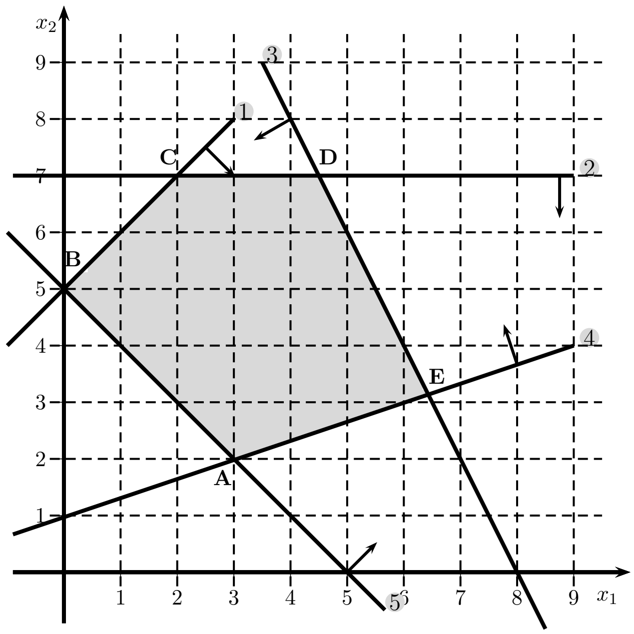
Question no 1 (18 points)

Soit un programme linéaire dont le domaine des solutions admissibles est représenté sur la figure suivante.



(a) (10 points)

Donnez toutes les contraintes associées à ce domaine des solutions admissibles.



(b) (4 points)

Si la fonction-objectif est max $Z = 3x_1 + x_2$, identifiez le point extrême associé à la solution optimale et donnez précisément les coordonnées de ce point.

(c) (4 points)

Si la fonction-objectif est <u>min</u> $Z = c_1x_1 + 3x_2$, quelle(s) valeur(s) doit-on donner à c_1 pour que le point A soit une solution optimale ? Justifiez votre réponse.

Question no 2 (16 points)

Une entreprise peut usiner des engrenages pour des vélos sur 5 machines différentes. Le tableau qui suit résume les coûts de production associés à l'usinage des engrenages sur les différentes machines, ainsi que le temps en minutes pour usiner un engrenage sur chacune d'elles. Le coût fixe ne s'applique que si la machine est mise en marche pour la production. Les coûts unitaires représentent, pour chaque machine, les coûts de fabrication pour un engrenage. Lorsqu'une machine est utilisée, elle doit alors fabriquer au moins 200 unités.

Machine	Coût fixe ($)	Coût unitaire ($)	Temps d'usinage (minutes)
1	825	26	0,5
2	750	24	0,4
3	900	22	0,5
4	1022	23	0,6
5	825	21	1,2

(a) (8 points)

Durant le prochain quart de travail de 8 heures, la compagnie doit fabriquer 2000 engrenages. On vous demande de construire un modèle de programmation linéaire qui permettra de déterminer comment elle devrait distribuer la fabrication entre les machines afin de minimiser les coûts totaux de production. Définir clairement vos variables.

(b) (4 points)

Compte tenu des normes sur la qualité de l'air, si la machine 1 est en marche, alors au plus 2 autres machines peuvent fonctionner. Modifier le modèle présenté en (a) afin de tenir compte de cette nouvelle contrainte.

(c) (4 points)

Remarque : *Cette sous-question est indépendante des sous-questions (a) et (b).*

Soit y_A, y_B, y_C et y_D quatre variables binaires représentant quatre événements appelés A, B, C et D. Si l'événement A se produit et que l'événement B ne se produit pas, alors l'événement C et l'événement D doivent se produire. En utilisant les variables binaires, indiquez une ou des contraintes qui permettraient de modéliser cette situation.

Question no 3 (14 points)

Considérez le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lcl}
\max Z = x_1 - x_2 + 2x_3 & & \\
\text{sous les contraintes :} & & \\
-4x_1 + x_2 + \ \ x_3 & \leq & 20 \\
\ \ x_1 \qquad\quad + 3x_3 & \leq & 60 \\
2x_1 - x_2 + \ \ x_3 & \leq & 10 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) (12 points)

Résolvez ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe.

Variables en base									Valeur

Variables en base									Valeur

Variables en base									Valeur

Variables en base									Valeur

(b) (2 points)

Est-ce que ce programme linéaire possède plus d'une solution optimale? Justifiez votre réponse.

Question no 4 (20 points)

Soit le modèle de programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 20x_1 + 60x_2 + 140x_3} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{sous les contraintes:}} \\
12x_1 + 20x_2 + 15x_3 & \leq & 200 & \text{(contrainte 1)} \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \geq & 20 & \text{(contrainte 2)} \\
x_1 - x_3 & \leq & 10 & \text{(contrainte 3)} \\
x_2 & \geq & 4 & \text{(contrainte 4)} \\
x_1 + x_2 & \leq & 18 & \text{(contrainte 5)} \\
x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

La solution optimale du programme linéaire est présentée dans le tableau du simplexe suivant. Les variables e_1, e_2, e_3, e_4 et e_5 représentent les variables d'écart et de surplus utilisées dans chacune des contraintes et les variable a_2 et a_4 des variables artificielles utilisées dans les contraintes 2 et 4.

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	a_2	a_4	Valeur
Z	1	92	0	0	9,33	0	0	126,67	0	M	M-126,67	1360
e_2	0	-1,4	0	0	0,13	1	0	-1,33	0	-1	1,33	12
x_3	0	0,8	0	1	0,07	0	0	1,33	0	0	-1,33	8
e_3	0	1,8	0	0	0,07	0	1	1,33	0	0	-1,33	18
x_2	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	4
e_5	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	14

(a) (5 points)

Écrivez la formulation duale de ce problème.

max $Z = 20x_1 + 60x_2 + 140x_3$
sous les contraintes:

$$\begin{array}{rcll} 12x_1 + 20x_2 + 15x_3 & \leq & 200 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \geq & 20 & (2) \\ x_1 - x_3 & \leq & 10 & (3) \\ x_2 & \geq & 4 & (4) \\ x_1 + x_2 & \leq & 18 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	a_2	a_4	Valeur
Z	1	92	0	0	9,33	0	0	126,67	0	M	M-126,67	1360
e_2	0	-1,4	0	0	0,13	1	0	-1,33	0	-1	1,33	12
x_3	0	0,8	0	1	0,07	0	0	1,33	0	0	-1,33	8
e_3	0	1,8	0	0	0,07	0	1	1,33	0	0	-1,33	18
x_2	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	4
e_5	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	14

(b) (5 points)

En se basant sur le tableau du simplexe de la solution optimale du primal, donnez la solution optimale du dual; i.e. la valeur des variables ainsi que la valeur de la fonction-objectif. Justifiez votre démarche.

(c) (5 points)

Pour quelles valeurs du coefficient de x_3 dans la fonction-objectif (i.e. $c_3 = 140$) la solution actuelle demeure-t-elle optimale? Justifiez votre réponse.

max $Z = 20x_1 + 60x_2 + 140x_3$
sous les contraintes:

$$\begin{array}{rcll} 12x_1 + 20x_2 + 15x_3 & \leq & 200 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \geq & 20 & (2) \\ x_1 - x_3 & \leq & 10 & (3) \\ x_2 & \geq & 4 & (4) \\ x_1 + x_2 & \leq & 18 & (5) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	a_2	a_4	Valeur
Z	1	92	0	0	9,33	0	0	126,67	0	M	M-126,67	1360
e_2	0	-1,4	0	0	0,13	1	0	-1,33	0	-1	1,33	12
x_3	0	0,8	0	1	0,07	0	0	1,33	0	0	-1,33	8
e_3	0	1,8	0	0	0,07	0	1	1,33	0	0	-1,33	18
x_2	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	4
e_5	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	14

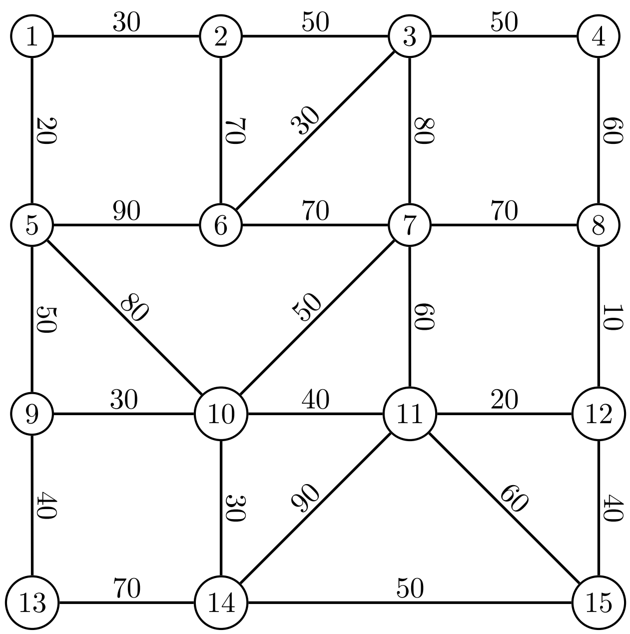
(d) (5 points)

Si le membre de droite de la quatrième contrainte ($b_4 = 4$) augmente de 3 unités (i.e. $b_4 = 7$), quel sera l'impact sur la valeur des variables ainsi que sur la valeur de Z.

Question no 5 (12 points)

On vient de faire l'installation de 15 détecteurs de mouvement dans une section d'un musée (les noeuds 1 à 15 sur le graphe suivant). Ces détecteurs seront activés lorsque le musée sera fermé. Dès qu'un mouvement est détecté par un détecteur, un signal doit parvenir aux autres détecteurs.

On souhaite effectuer le cablage afin de relier entre eux les 15 détecteurs de mouvement. Les arêtes du graphe suivant représentent des liens potentiels entre certains détecteurs de mouvement et le nombre au-dessus des arêtes indiquent la longueur de chaque lien en mètres. On cherche le sous-ensemble des arêtes de ce réseau qui minimisera la longueur totale de cable qui permettra la communication entre toutes les paires de détecteurs de mouvement. Indiquez la configuration optimale sur le graphe suivant ainsi que la longueur totale.



Question no 6 (20 points)

Le tableau qui suit est associé à un problème de transport entre quatre fournisseurs (F_1, F_2, F_3 et F_4) et trois clients (C_1, C_2 et C_3). Les nombres dans les cases ombragées représentent les coûts unitaires de transport entre un fournisseur et un client.

(a) (6 points)

Trouvez une solution de base admissible en utilisant la méthode approximative de Vogel.

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	17	22	11	40
F_2	30	11	19	40
F_3	10	11	6	30
F_4	18	20	15	40
Demande	60	30	60	150

(b) (12 points)

À partir de la solution obtenue en (a), trouvez la solution optimale.

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	17	22	11	40
F_2	30	11	19	40
F_3	10	11	6	30
F_4	18	20	15	40
Demande	60	30	60	150

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	17	22	11	40
F_2	30	11	19	40
F_3	10	11	6	30
F_4	18	20	15	40
Demande	60	30	60	150

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	17	22	11	40
F_2	30	11	19	40
F_3	10	11	6	30
F_4	18	20	15	40
Demande	60	30	60	150

(c) (2 points)

Est-ce que la solution optimale obtenue en (b) est unique ?