ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION NOVEMBRE 2018

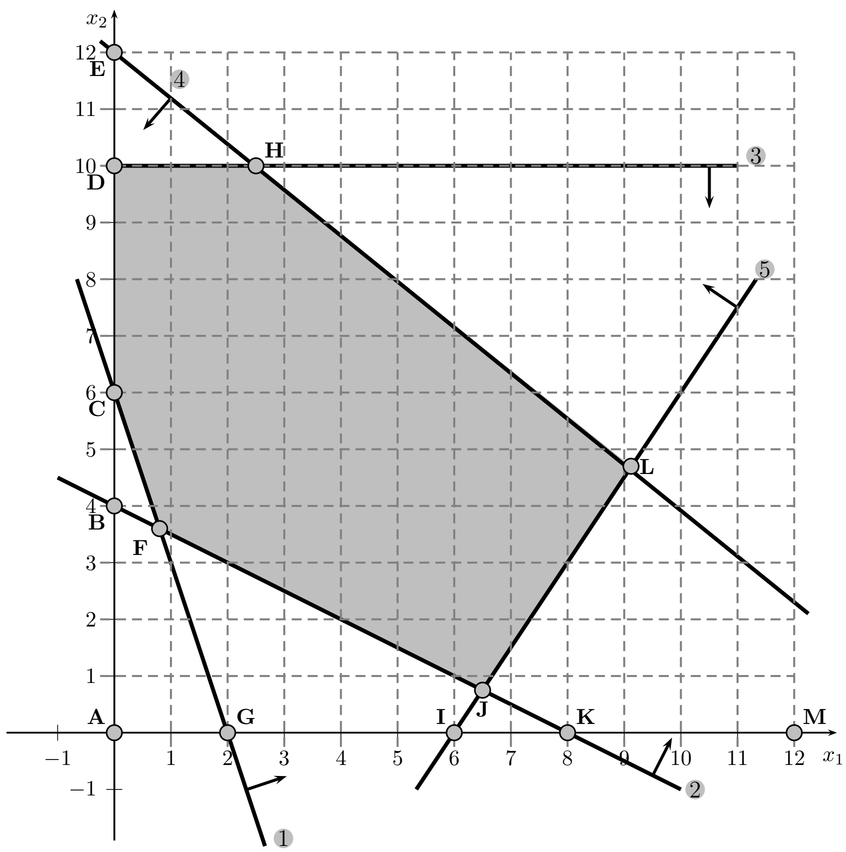
14-IN-A1

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

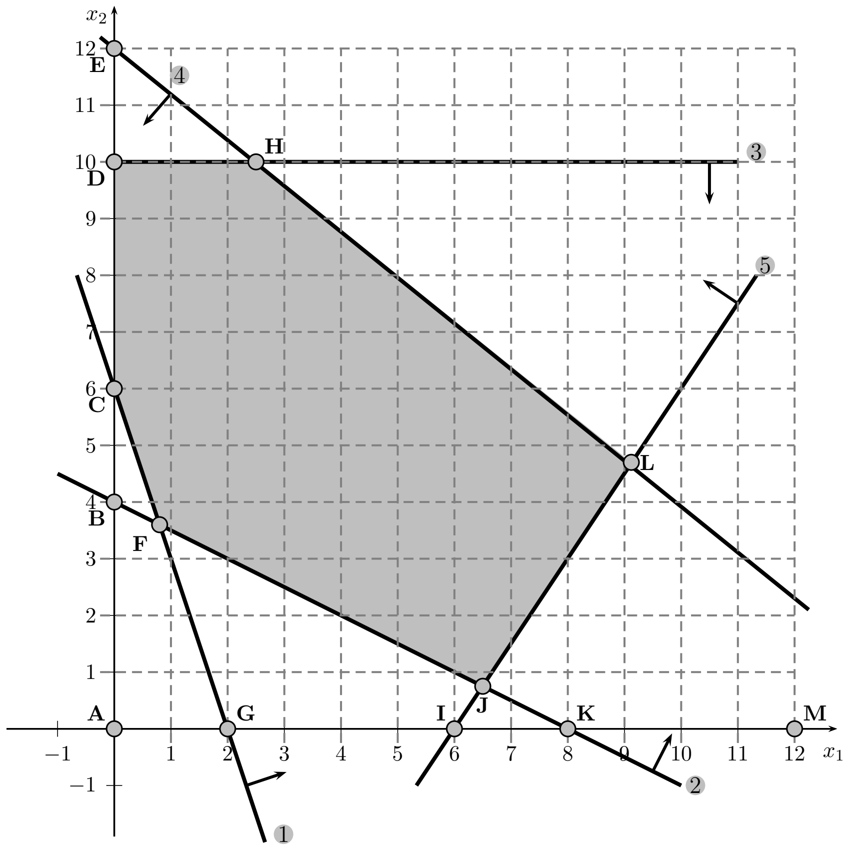
Question no 1 (20 points)

Soit un programme linéaire dont le domaine des solutions admissibles est représenté sur la figure suivante.



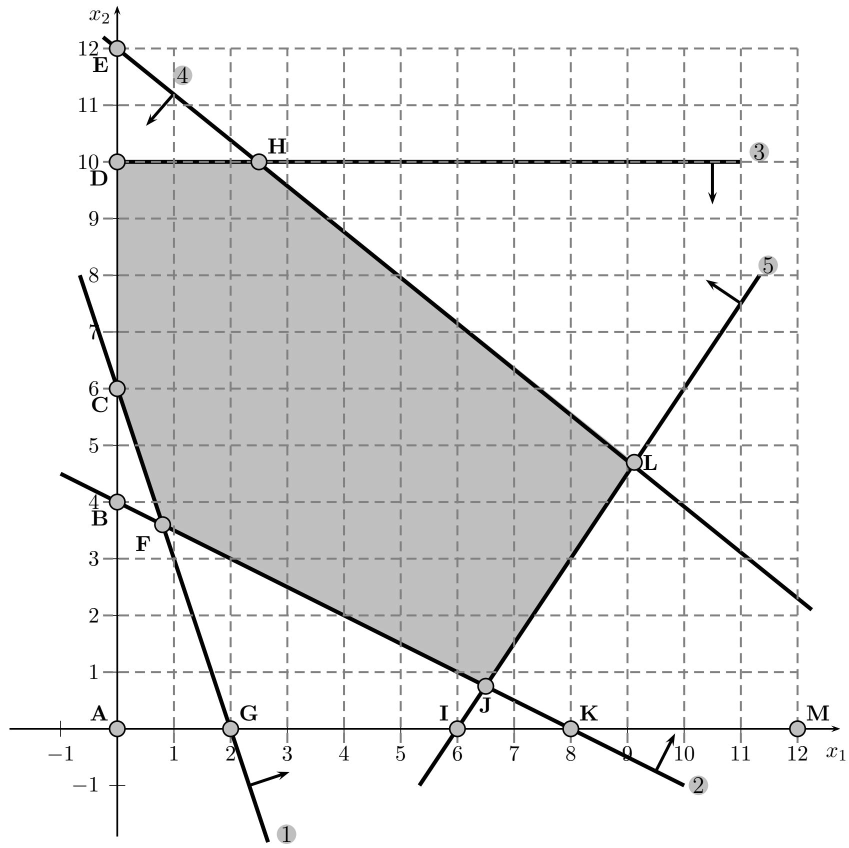
(a) (6 points)

Donnez toutes les contraintes associées à ce domaine des solutions admissibles.



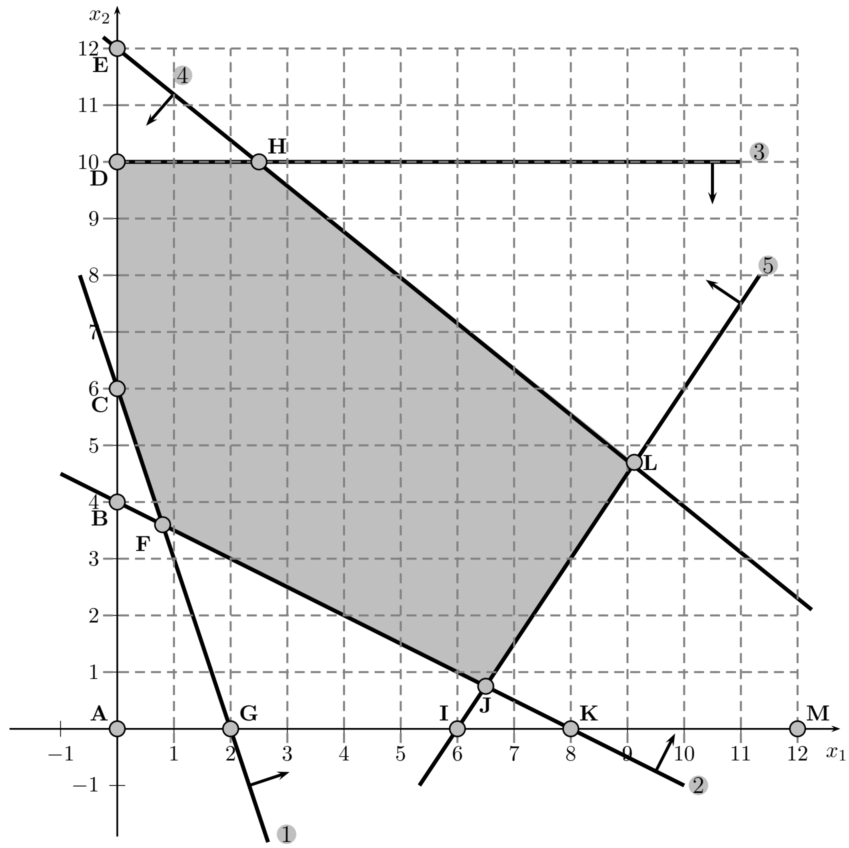
(b) (4 points)

Si la fonction objectif de ce programme linéaire est $\min Z = 2x_1 + x_2$, quelle est la solution optimale? Donnez la valeur exacte des variables et la valeur de Z en utilisant les équations des contraintes actives ?



(c) (6 points)

Si la fonction objectif du programme linéaire est $\max Z = kx_1 + 2x_2$, quelle(s) valeur(s) doit-on donner au paramètre k pour que le point L de la figure soit la solution optimale unique de ce programme linéaire.



(d) (4 points)

Si la fonction-objectif de ce programme linéaire est $\max Z = 4x_1 - 5x_2$, et que x_1 et x_2 sont définies comme des variables entières, quelle est la solution optimale de ce programme linéaire en nombres entiers ? Justifiez votre réponse.

Question no 2 (16 points)

Une entreprise doit fabriquer 3 types de fertilisants agricoles : F_1, F_2, et F_3. Quatre produits chimiques, C_1, C_2, C_3 et C_4, sont utilisés dans la composition des trois fertilisants. Le fertilisant F_1 doit être composé d'au moins 50% de C_1. De plus, la somme de C_3 et C_4 ne doit pas dépasser 20% de la quantité totale du fertilisant F_1. Dans le fertilisant F_2, la quantité de C_2 doit être au moins deux fois plus grande que celle de C_3. De plus, F_2 doit contenir au moins 30% de C_2. Finalement, dans le fertilisant F_3, la quantité de C_4 doit être inférieure à 20% de la somme des quantités de C_1 et C_3.

Le tableau suivant indique le coût d'achat ($/kg) des produits chimiques ainsi que la quantité (en kg) disponible pour chacun d'eux.

Produit chimique	Coût ($/kg)	Quantité (kg)
C_1	6.25	10000
C_2	7.50	22000
C_3	9.00	15000
C_4	6.75	21500

Le prix de vente des fertilisants F_1, F_2 et F_3 est 70$/kg, 72$/kg, et 80$/kg, respectivement.

(a) (8 points)

Si on émet l'hypothèse que tous les fertilisants fabriqués seront vendus, élaborez un modèle de programmation linéaire qui permettra de maximiser les profits de l'entreprise. Définissez clairement vos variables.

(b) (4 points)

Si les produits chimiques C_2 et C_4 ne doivent jamais être mélangés dans le même fertilisant, comment doit-on modifier le modèle présenté en (a) afin de tenir compte de cette nouvelle contrainte?

(c) (4 points)

Remarque: *Cette sous-question est indépendante des sous-questions (a) et (b).*

Soit y_A, y_B, y_C et y_D quatre variables binaires représentant quatre événements notés A, B, C et D. Si l'événement A et l'événement B se produisent, alors l'événement C et l'événement D doivent se produire. En utilisant les variables binaires, indiquez une ou des contraintes qui permettraient de modéliser cette situation.

Question no 3 (14 points)

Considérez le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{l}
\max Z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{sous les contraintes:} \\
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 120 \\
x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 80 \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 100 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

(a) (12 points)

Résoudre ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe.

Variables de base									Valeur

Variables de base									Valeur

Variables de base									Valeur

Variables de base									Valeur

(b) (2 points)

Est-ce que le programme linéaire admet plus d'une solution optimale ? Justifiez votre réponse.

Question no 4 (10 points)

On souhaite affecter quatre tâches à quatre machines. Le tableau suivant indique le temps de fabrication en minutes si la tâche J_j est affectée à la machine M_i.

Tâches	Machines			
	J_1	J_2	J_3	J_4
M_1	12	9	14	17
M_2	11	10	15	15
M_3	13	11	15	18
M_4	11	12	13	16

(a) (8 points)

À quelle machine doit-on affecter chaque tâche afin de minimiser le temps total de fabrication ?

(b) (2 points)

Est-ce que cette solution optimale est unique ? Justifiez vorte réponse.

Question no 5 (20 points)

Considérez le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{sous les contraintes:}} \\
x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 100 & (1) \\
-4x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 80 & (2) \\
x_1 + x_3 & \geq & 90 & (3) \\
x_1 + 2x_3 & \leq & 120 & (4) \\
x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

La solution optimale de ce programme linéaire est décrite dans le tableau du simplexe suivant. Les variables e_1, e_2, e_3, et e_4 représentent les variables d'écart et d'excédent utilisées dans chaque contrainte, et la variable a_3 est la variable artificielle utilisée dans la contrainte 3.

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	Valeur
Z	1	0	1	0	1	0	0	M	1	220
e_3	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	10
e_2	0	0	-6	0	7	1	0	0	-3	420
x_1	0	1	-2	0	2	0	0	0	-1	80
x_3	0	0	1	1	-1	0	0	0	1	20

(a) (5 points)

Écrivez la formulation duale de ce programme linéaire.

max $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$
sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcll} x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 100 & (1) \\ -4_1 + x_2 - x_3 & \leq & 80 & (2) \\ x_1 + x_3 & \geq & 90 & (3) \\ x_1 + 2x_3 & \leq & 120 & (4) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	Valeur
Z	1	0	1	0	1	0	0	M	1	220
e_3	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	10
e_2	0	0	-6	0	7	1	0	0	-3	420
x_1	0	1	-2	0	2	0	0	0	-1	80
x_3	0	0	1	1	-1	0	0	0	1	20

(b) (5 points)

En ce basant sur le tableau du simplexe de la solution optimale de la formulation primale, donnez les valeurs de la solution optimale du dual, c'est-à-dire la valeur des variables et la valeur de la fonction objectif. Justifiez votre réponse.

(c) (5 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du coefficient de x_1 dans la fonction objectif (i.e. $c_1 = 2$) la solution courante demeure-t-elle optimale ? Justifiez votre réponse.

max $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$
sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcll} x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 100 & (1) \\ -4_1 + x_2 - x_3 & \leq & 80 & (2) \\ x_1 + x_3 & \geq & 90 & (3) \\ x_1 + 2x_3 & \leq & 120 & (4) \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

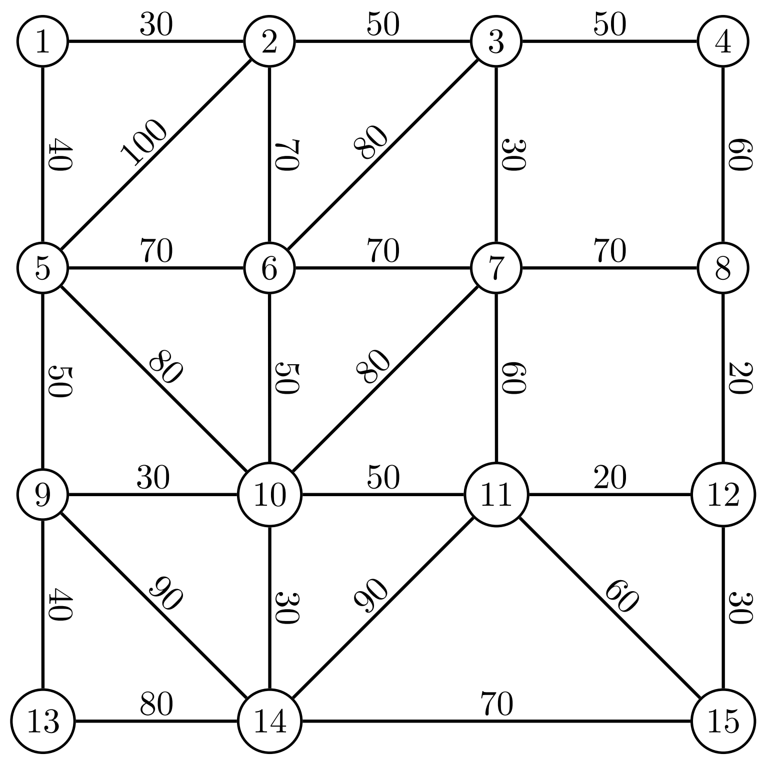
Variables en base	Z	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	a_3	e_4	Valeur
Z	1	0	1	0	1	0	0	M	1	220
e_3	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	10
e_2	0	0	-6	0	7	1	0	0	-3	420
x_1	0	1	-2	0	2	0	0	0	-1	80
x_3	0	0	1	1	-1	0	0	0	1	20

(d) (5 points)

Si le membre de droite de la 4^e contrainte ($b_4 = 120$) augmente de 40 unités (i.e. $b_4 = 160$), quel sera l'impact sur la valeur des variables et de Z?

Question no 6 (20 points)

Les noeuds du graphe de la figure suivante représentent 15 sites d'un futur parc d'attraction. Les arêtes entre les noeuds représentent des segments routiers potentiels entre les 15 sites et les nombres indiqués au-dessus des arêtes représentent la distance en mètres entre les sites.

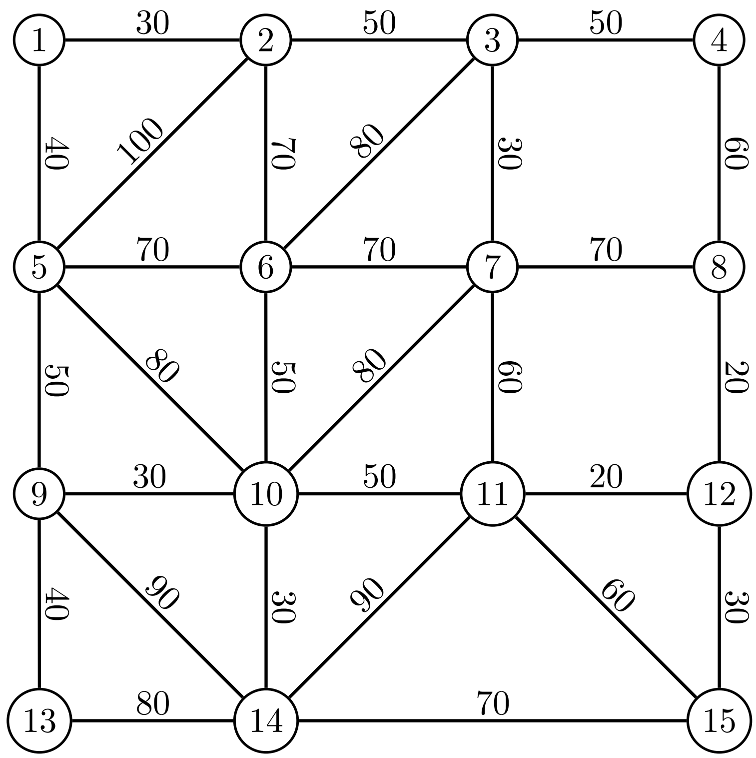


(a) (8 points)

Si tous les segments routiers sont construits, quelle serait la distance minimale entre le site 1 et les autres sites ?

(b) (8 points)

Les propriétaires du parc cherchent à identifier les segments routiers qu'il faudra construire parmi tous les segments routiers illustrés sur la figure afin de connecter tous les sites du parc entre eux à un coût minimal sachant que les coûts de construction sont estimés à 1000$/m. Illustrez la solution sur le graphe et indiquez quels seront les coûts totaux de contruction.



(c) (4 points)

Si le segment routier $(9, 10)$ ne peut pas être construit, est-ce que la solution trouvée en (b) demeure valide ? Si non, indiquez quel segment routier remplacera $(9, 10)$ et quels seront les coûts de construction additionnels.