ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

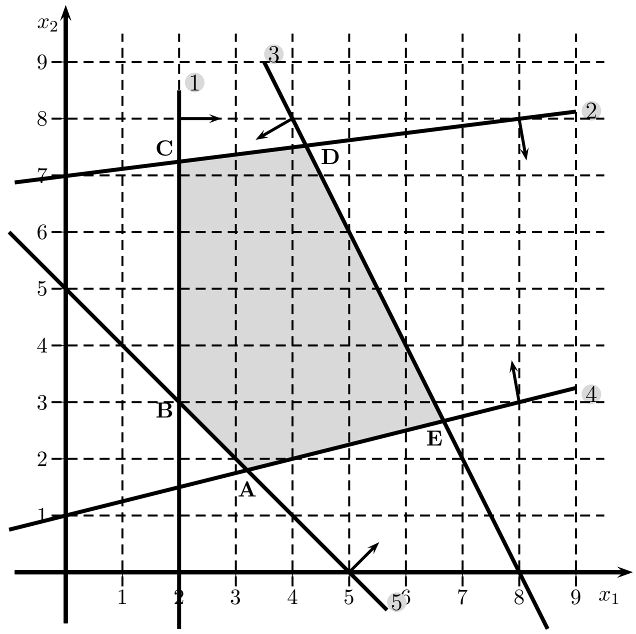
EXAMEN 14-IN-A1

SESSION DE MAI 2019

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

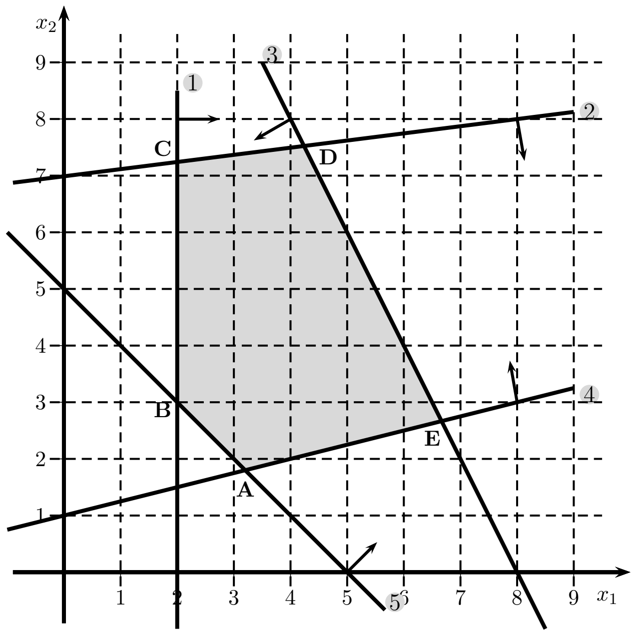
Question no 1 (18 points)

Soit un programme linéaire dont le domaine des solutions admissibles est représenté sur la figure suivante.



(a) (10 points)

Donnez toutes les contraintes associées à ce domaine des solutions admissibles.



(b) (4 points)

Si la fonction-objectif est max $Z = x_1 + 2x_2$, identifiez le point extrême associé à la solution optimale et donnez précisément les coordonnées de ce point.

(c) (4 points)

Si on ajoute la contrainte $3x_1 + x_2 \leq b$, quelle(s) valeur(s) doit prendre le paramètre b pour que le domaine des solutions admissibles admette au moins une solution admissible ? Justifiez votre réponse.

Question no 2 (16 points)

Une compagnie fabrique quatre produits de nettoyage, notés P1, P2, P3 et P4, à partir de trois liquides de base, notés L1, L2 et L3. Le tableau qui suit indique combien de litres au maximum l'entreprise pourrait se procurer pour chacun des liquides, le prix qu'elle devra payer en dollars par litre. Chaque litre de liquide qu'elle n'aura pas utilisé dans ses quatre produits sera revendu au prix indiqué dans la troisième colonne.

Liquide	Prix d'achat ($/litre)	Prix de vente ($/litre)	Quantité disponible (litres)
L1	1,50	1,75	400
L2	1,75	1,95	375
L3	3,05	3,15	425

Le tableau qui suit indique les conditions que doit respecter l'entreprise lors de la composition des quatre produits de nettoyage ainsi que leur prix de vente.

Produit	L1	L2	L3
P1	au moins 30%	25%	au moins 10%
P2	au plus 40%	au moins 15%	au plus 30%
P3		au plus 30%	au moins 30%
P4	40%	au moins 10%	au moins 30%

Émettez l'hypothèse que le marché peut absorber toute la production des quatre produits.

(a) (8 points)

On vous demande de construire un modèle de programmation linéaire qui permettra à l'entreprise de maximiser ses profits. Définir clairement vos variables.

(b) (4 points)

Compte tenu que les produits P1 et P3 sont similaires, l'entreprise souhaiterait voir l'impact si elle produisait un seul de ces deux produits. Comment doit-on modifier le modèle présenté en (a) pour tenir compte de cette contrainte.

(c) (4 points)

Remarque : *Cette sous-question est indépendante des sous-questions (a) et (b).*

Soit y_A, y_B, y_C et y_D quatre variables binaires représentant quatre événements appelés A, B, C et D. Si l'événement A se produit et que l'événement C ne se produit pas, alors l'événement B ou l'événement D doivent se produire. En utilisant les variables binaires, indiquez une ou des contraintes qui permettraient de modéliser cette situation.

Question no 3 (14 points)

Considérez le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lcl}
\max Z = 3x_1 + x_2 & & \\
\text{sous les contraintes :} & & \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\
x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 & \leq & 2 \\
7x_1 + 3x_2 - 5x_3 & \leq & 20 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) (10 points)

Résolvez ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe.

(b) (4 points)

Indiquez si la solution obtenue est

1. optimale et unique;
2. optimal et multiple;
3. non bornée;
4. dégénérée.

Justifiez votre réponse.

Question no 4 (10 points)

Soit le modèle de programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{rcll}
\multicolumn{4}{l}{\max\ Z = 6.5x_1 + 5x_2 + 10x_3} \\
\multicolumn{4}{l}{\text{sous les contraintes}} \\
x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 350 & (1) \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq & 250 & (2) \\
3x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 200 & (3) \\
0.75x_1 + 1.5x_2 + x_3 & \leq & 1200 & (4) \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

(a) (5 points)

Écrivez la formulation duale de ce problème.

max $Z = 6.5x_1 + 5x_2 + 10x_3$
sous les contraintes

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & x_1 + 3x_2 - 2x3 & \leq & 350 \\
(2) & 2x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq & 250 \\
(3) & 3x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 200 \\
(4) & 0.75x_1 + 1.5x_2 + x_3 & \leq & 1200 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b) (5 points)

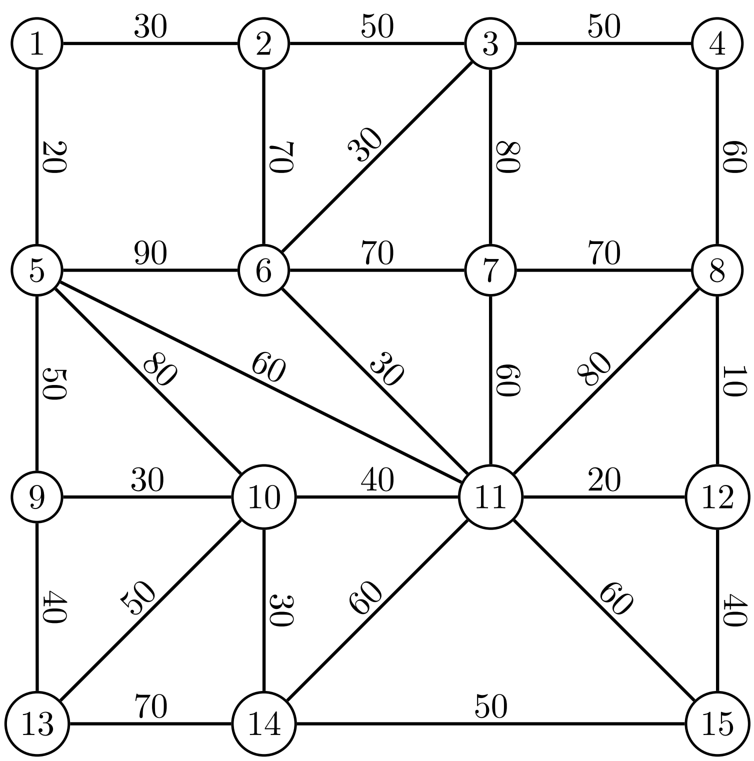
Si la solution optimale au problème est $x_1 = 80$, $x_2 = 90$ et $x_3 = 0$ et que la variable duale associée à la contrainte 1 est 0.7, donnez la valeur des autres variables duales.

Question no 5 (14 points)

L'organisateur d'un festival d'été veut acheminer l'électricité à chacun de ses kiosques. Pour ce faire, il a dessiné un plan des 14 sites d'exposition (noeuds 2 à 15) et de l'endroit où se situera la génératrice (noeud 1). Les arêtes sur le graphe suivant représentent des liens potentiels (câbles électriques) identifiés par l'organisateur pour acheminer l'électricité entre deux kiosques et la valeur au-dessus des arêtes représente la longueur du câble (en mètres) qui serait installé.

(a) (10 points)

On cherche le sous-ensemble des arêtes de ce réseau qui minimisera la longueur totale de câble qui permettra d'assurer que chaque kiosque soit alimenté en électricité. Indiquez la configuration optimale sur le graphe suivant ainsi que la longueur totale.

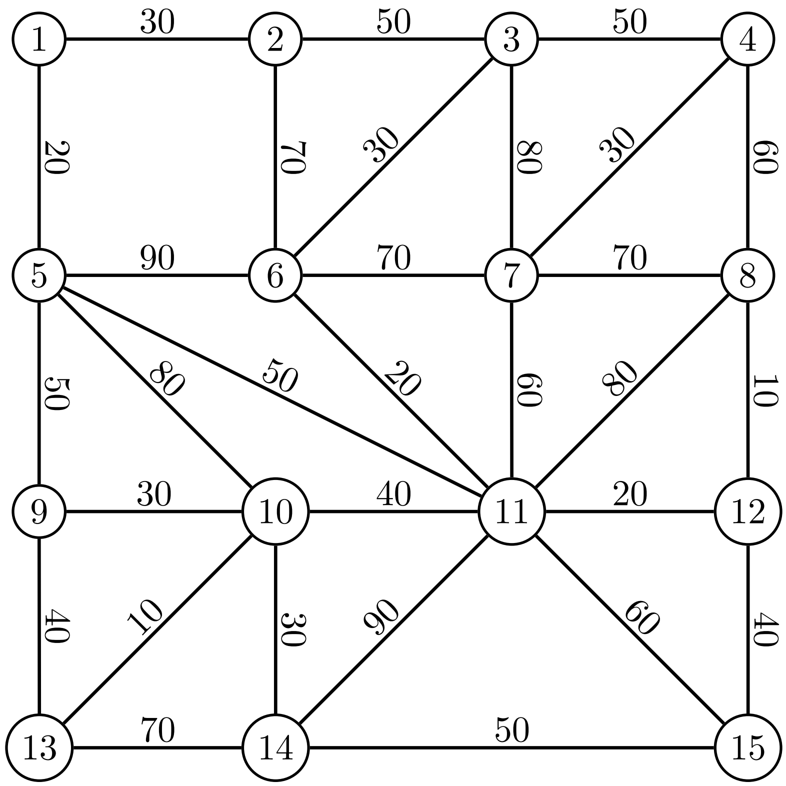


(b) (4 points)

Est-ce que la solution est unique ?

Question no 6 (10 points)

Trouver le plus court chemin entre le noeud 1 et chacun des autres noeuds du graphe suivant.



Question no 7 (18 points)

Le tableau qui suit est associé à un problème de transport entre quatre fournisseurs (F_1, F_2, F_3 et F_4) et trois clients (C_1, C_2 et C_3). Les nombres dans les cases ombragées représentent les coûts unitaires de transport entre un fournisseur et un client.

(a) (6 points)

Montrez que la solution de base admissible suivante n'est pas optimale.

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	11 10	12 40	14	50
F_2	25 10	22	19 10	20
F_3	10	11	8 40	40
F_4	16 30	18	15	30
Demande	50	40	50	140

(b) (12 points)

À partir de la solution obtenue en (a), trouvez la solution optimale.

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	11	12	14	50
F_2	25	22	19	20
F_3	10	11	8	40
F_4	16	18	15	30
Demande	50	40	50	140

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	11	12	14	50
F_2	25	22	19	20
F_3	10	11	8	40
F_4	16	18	15	30
Demande	50	40	50	140

	C_1	C_2	C_3	Offre
F_1	11	12	14	50
F_2	25	22	19	20
F_3	10	11	8	40
F_4	16	18	15	30
Demande	50	40	50	140