

ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE MAI 2015

Toute documentation permise
Calculatrices : modèles autorisés seulement
Durée de l'examen : 3 heures

14-AE-A2
MÉCANIQUE DES FLUIDES APPLIQUÉES

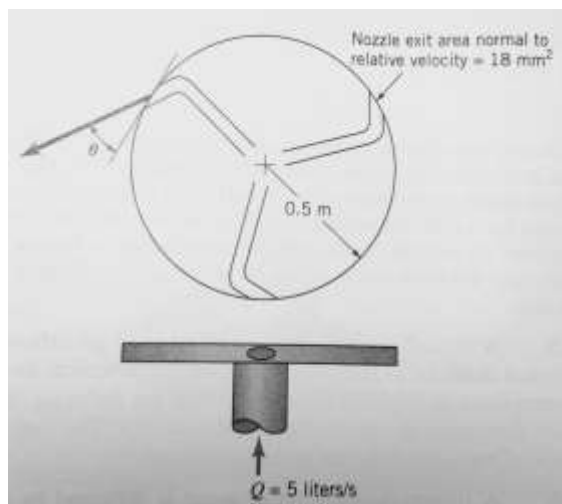
1) Gicleur d'eau rotatif: (20 points)

Comme le montre la figure suivante, de l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) pénètre dans le rotor d'un gicleur rotatif (au niveau de l'axe de rotation) à un débit de cinq litres par seconde (5 l/s). La section transversale de chacune des trois buses de sortie est de 18 mm^2 et le rayon r séparant l'axe de rotation de l'axe central de chaque buse est de 500 mm.

Dans les deux cas suivants, à quelle vitesse de rotation $[\omega_{\text{rotor}} \text{ (rpm)}]$ tournera le gicleur si le couple résistant est réduit à zéro?

a) $\theta = 0^\circ$. (13 points)

b) $\theta = 60^\circ$. (7 points)



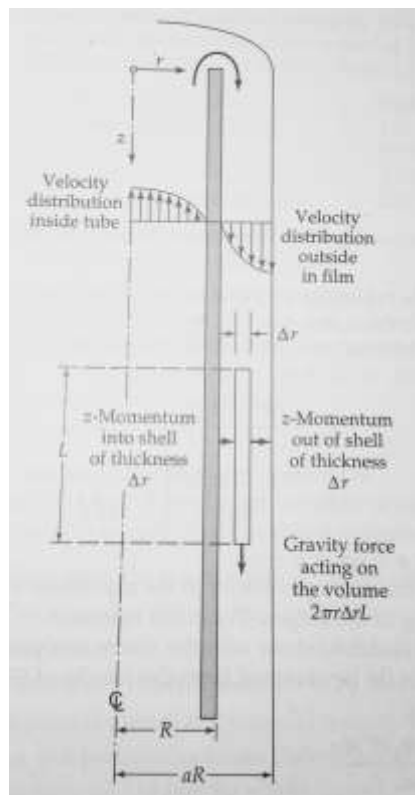
2) Écoulement tombant d'un liquide newtonien le long de la surface extérieure d'un cylindre: (30 points)

Un liquide visqueux (densité: ρ , viscosité: μ) s'écoulant (vers le haut) à travers une conduite cylindrique de rayon R fini par redescendre le long de la surface extérieure du cylindre pour générer un film tombant annulaire d'épaisseur $R(a-1)$, tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous. En négligeant les effets de bords et en considérant un écoulement en régime laminaire:

- Posez le bilan de la quantité de mouvement sur un élément très mince du film d'épaisseur Δr et de longueur L , tel que montré sur le schéma. **(8 points)**
- En appliquant les deux conditions frontières adéquates au niveau de l'interface cylindre/film et de l'interface film/air, démontrez que le profil de vitesse à travers le film tombant est donné par l'expression suivante : **(22 points)**

$$v_z(r) = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2a^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right]$$

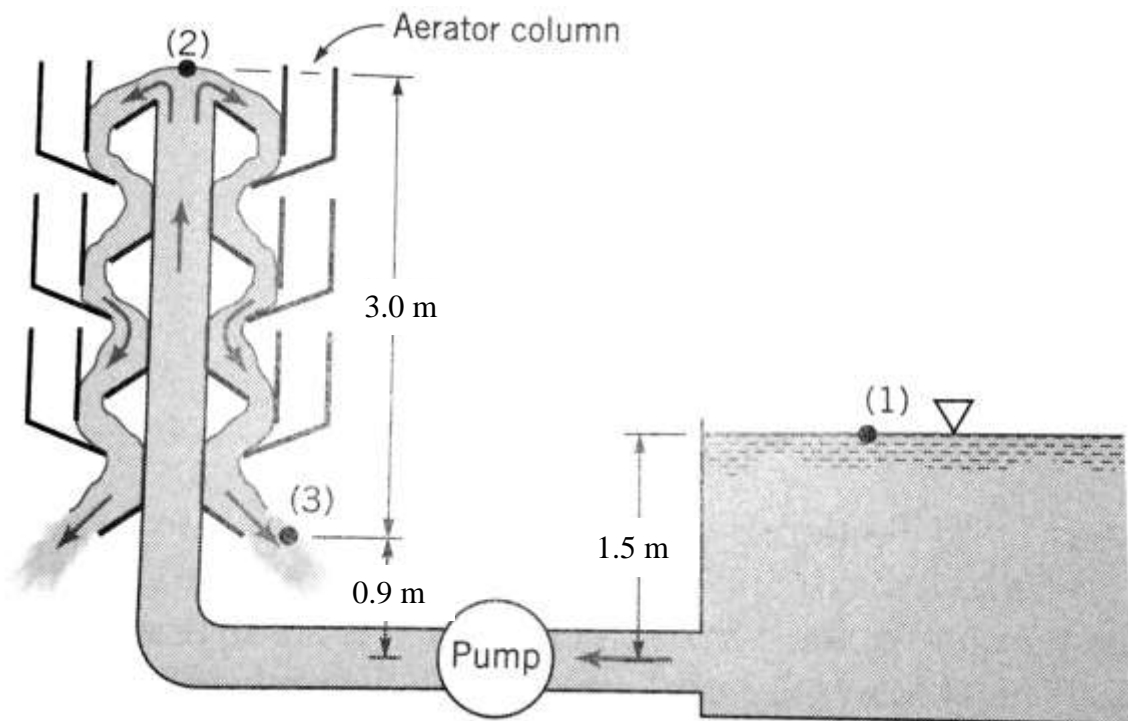
où g est l'accélération gravitationnelle et r est la position radiale par rapport à l'axe de la conduite.



3) Pompage d'eau à travers une colonne d'aération (application de l'équation de Bernoulli): (30 points)

De l'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) est pompée à la température ambiante, à partir d'un réservoir, à un débit volumique de $85 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, point (1), vers le haut d'une colonne d'aération, point (2), tel qu'illustré dans le schéma ci-dessous.

- a) Calculez la puissance de pompage \dot{W} (Watt) si la hauteur de perte de charge h_L entre les niveaux (1) et (2) où $v_2 = 0$ est égale à 1.22 m. **(15 points)**
- b) Déterminez la hauteur de perte de charge entre le niveau (2) et le fond de la colonne d'aération, point (3), si la vitesse moyenne en (3) est $v_3 = 0.6 \text{ m/s}$. **(15 points)**



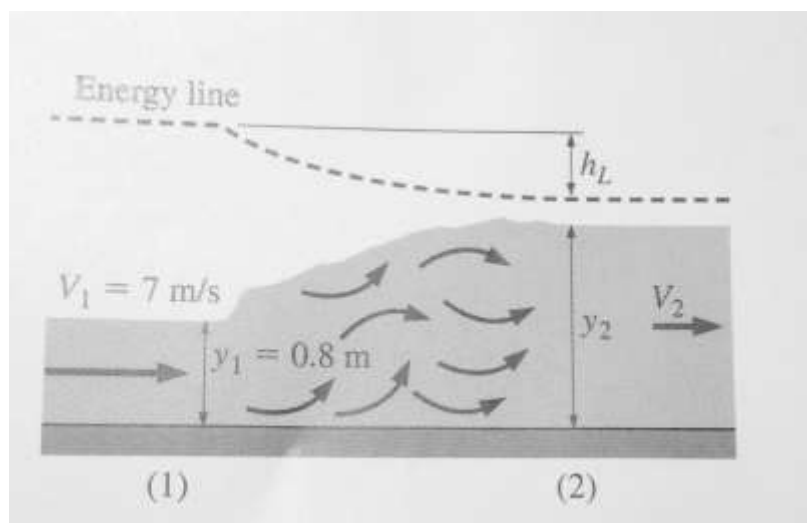
4) Ressaut hydraulique: (20 points)

Le déversement d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), à travers la porte d'une écluse, dans un canal horizontal rectangulaire large de 10 m génère un ressaut hydraulique, comme le montre la figure suivante. La hauteur et la vitesse de l'eau avant le ressaut sont respectivement de 0.8 m et 7 m/s. Considérez que l'écoulement est en régime permanent et que le canal est suffisamment large (effets de bords négligeables).

- a) Sous quelle condition le ressaut hydraulique a lieu? (en termes de nombre de Froude en amont du ressaut) (4 points)
- b) Déterminez la profondeur d'eau, y_2 , ainsi que le nombre de Froude, Fr_2 , en aval du ressaut. (8 points)
- c) Calculez la hauteur de perte de charge h_L (m) due au ressaut ainsi que le rapport de dissipation d'énergie '*energy dissipation ratio*', h_L/E_{s1} , où E_{s1} est l'énergie spécifique de l'eau en amont du ressaut. (8 points)

Nb : Pour un écoulement à travers un canal de section rectangulaire, le nombre de Froude est exprimé en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement $\langle V \rangle$ et de la hauteur H du canal par la

relation suivante : $Fr = \frac{\langle V \rangle}{\sqrt{g \cdot H}}$, avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



Annexes

1. Loi de Newton généralisée:

$$[\boldsymbol{\tau} = -\mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\delta}]$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.1-8})^a$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.1-9})^a$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.1-10})^a$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B.1-11})$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \quad (\text{B.1-12})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad (\text{B.1-13})$$

in which

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.1-14})$$

2. Équation de continuité:

Cartesian coordinates (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{B.4-1})$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{B.4-2})$$

Spherical coordinates (r, θ, φ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0 \quad (\text{B.4-3})$$

3. Composante de l'équation de Navier-Stokes:

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}]$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad (\text{B.6-4})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{B.6-5})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{B.6-6})$$

4. Diagramme de Moody:

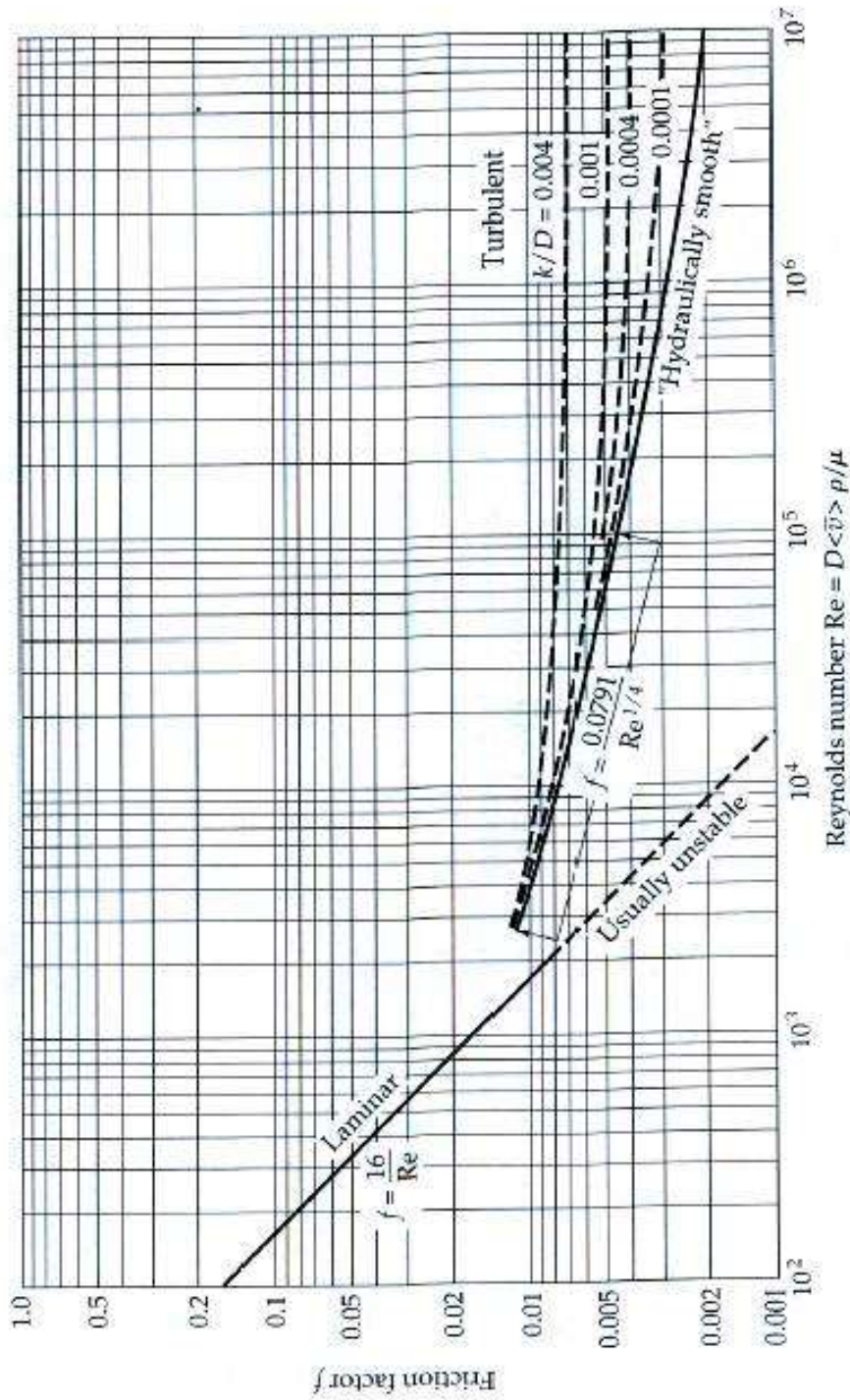


Fig. 6.2-2. Friction factor for tube flow (see definition of f in Eqs. 6.1-2 and 6.1-3. [Curves of L. F. Moody, *Trans. ASME*, 66, 671-684 (1944) as presented in W. L. McCabe and J. C. Smith, *Unit Operations of Chemical Engineering*, McGraw-Hill, New York (1954).]