ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2014

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l'examen : 3 heures

14-AE-A2

MÉCANIQUE DES FLUIDES APPLIQUÉES

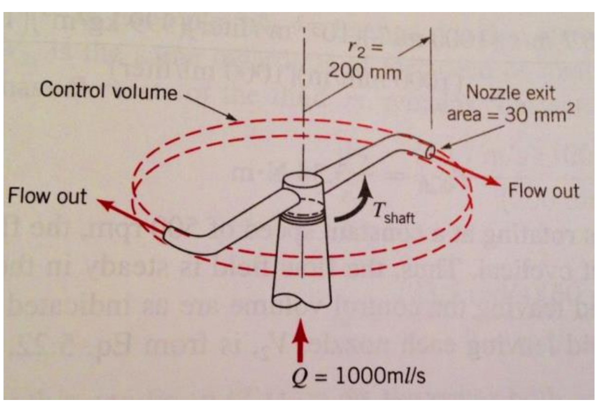
1) Écoulement d'eau à travers un gicleur rotatif: (20 points)

De l'eau pénètre par la base d'un arrosoir rotatif de pelouse à un débit constant de 1.0 litre/s (voir schéma ci-dessous). La section de chacune des deux buses cylindriques de sortie de l'arrosoir est de 30 mm^2 et ces dernières laissent échapper l'eau dans la direction tangentielle, tel que montré sur le schéma. Sachant que la distance séparant le centre de chacune des buses de sortie à l'axe de rotation de l'arrosoir est de 200 mm:

a) Déterminez le couple nécessaire 'T_{shaft} (N.m)' pour maintenir la tête de l'arrosoir stationnaire. **(7 points)**

b) Déterminez le couple nécessaire 'T_{shaft} (N.m)' pour imposer une vitesse de rotation de l'arrosoir de 500 tr/min. **(7 points)**

c) Déterminez la vitesse de rotation, ω (tr/min), de l'arrosoir si aucun couple n'est appliqué. **(6 points)**



2) Application des équations d'échange pour un écoulement laminaire de fluide newtonien sur un plan incliné: (30 points)

Sachant votre brillante réussite dans le cours de mécanique des fluides, la société Kraft Canada vous propose le poste d'ingénieur(e) dans l'une de ses unités de production de gaufrettes au chocolat. Afin de tester votre créativité, votre nouveau patron vous demande de développer un dispositif simple permettant d'enrober l'une des faces de sa gaufrette favorite avec une mince couche de chocolat. La masse d'une barre de gaufrette est M et sa géométrie est parallélépipédique de longueur L et de largeur W.

L'idée que vous proposez consiste à laisser glisser chacune des barres de gaufrette sur une large plaque inclinée couverte d'une mince couche de chocolat liquide dont l'épaisseur δ est maintenue constante à l'aide d'un dispositif d'alimentation à pression atmosphérique (voir schéma ci-dessous).

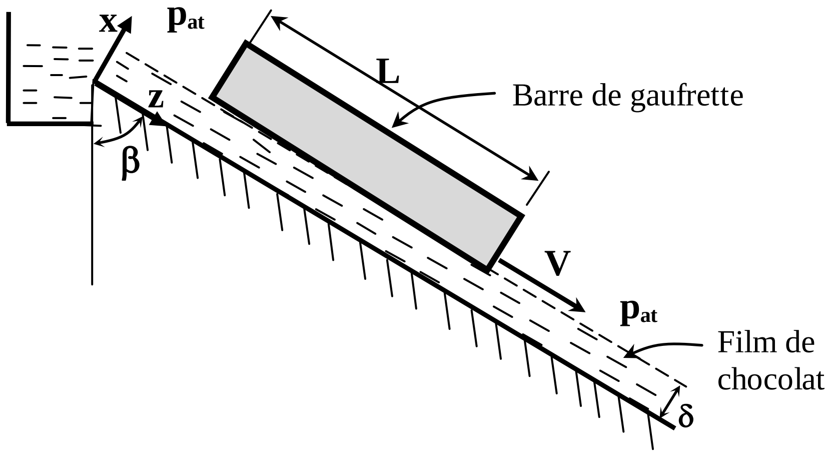
Considérant que le chocolat à l'état liquide se comporte comme un liquide newtonien incompressible ayant une viscosité μ et une masse volumique ρ, on vous demande de fournir à votre chef de projet l'expression de la vitesse en régime permanent, V, de la barre de gaufrette en fonction de sa mase et de ses dimensions (M, L, W), de l'angle d'inclinaison de la plaque (β), ainsi que la densité, la viscosité et l'épaisseur de la couche de chocolat (ρ, μ, δ).

a) Posez clairement les hypothèses de base nécessaires pour résoudre ce type de problème et relevez les conditions frontières en plaçant l'origine du système d'axes à l'interface plaque/film de chocolat, tel que présenté sur le schéma du montage. **(6 point)**

b) Après simplification de l'équation de continuité et des composantes de l'équation de Navier-Stokes présentées en annexe, développez l'expression du profil de vitesse $V_z(x)$ dans le film de chocolat liquide en fonction de la vitesse V de la barre de gaufrette. **(12 points)**

c) **Nb :** Étudiez l'écoulement seulement entre la gaufrette et le plan incliné.

d) Faites un bilan de forces sur la barre de chocolat et déduisez sa vitesse en régime permanent $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{M}, \mathrm{L}, \mathrm{W}, \rho, \mu, \delta, \beta)$. **(12 points)**



3) Pompage d'eau à travers une canalisation cylindrique avec singularités: (30 points)

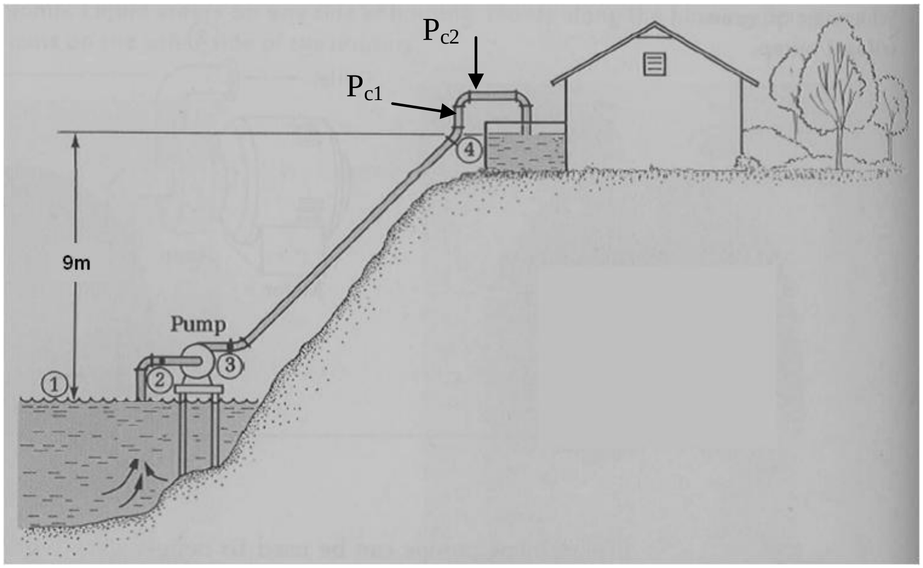
Une maison est située près d'un lac contenant de l'eau douce (à $T = 25^oC$: $\rho = 1000 kg/m^3, \mu = 10^{-3} Pa \cdot s$). Pour subvenir à ses besoins (arrosage de la pelouse, lessive, lavage de l'auto, etc.), le propriétaire décide d'installer une pompe près du lac afin de s'approvisionner en eau à raison de 95 litres/min. Cette eau est emmagasinée dans un réservoir installé juste à côté de la maison. Tel que montré sur le schéma ci-dessous, le circuit comporte 3 coudes à 90^o et deux coudes à 45^o. Il comporte aussi un total de 35 m de conduites lisses en PVC ayant un diamètre intérieur constant égal à 4.0 cm.

a) Vérifiez le régime de l'écoulement à l'intérieur de la conduite (laminaire ou turbulent?). (**7 points**)

b) Utilisez le diagramme de Moody (voir annexe) pour estimer le facteur de friction f au niveau de la surface intérieure de la conduite cylindrique. (**5 points**)

c) Si les pressions p_{c1} et p_{c2} en amont et en aval du coude 90^o situé au niveau du réservoir sont connues (voir schéma), trouvez les composantes (horizontale et verticale) de la force exercée sur ce coude en fonction de p_{c1} et p_{c2}. Négligez les forces de gravité. (**8 points**)

d) Sachant que le niveau d'eau dans le réservoir est maintenu constant à 9m par rapport au niveau du lac (voir schéma), calculez la puissance (kW) fournie par la pompe pour maintenir un débit d'eau constant à $95 litres/min$. (**10 points**)



4) Ressaut hydraulique lors de l'écoulement d'eau à travers un canal rectangulaire: (20 points)

Le schéma ci-dessous illustre un ressaut hydraulique ayant lieu dans un canal rectangulaire de largeur $D = 3m$. Les hauteurs d'eau en amont et en aval du ressaut (y_1 et y_2) sont respectivement égales à 0.6 et 1.6 m.

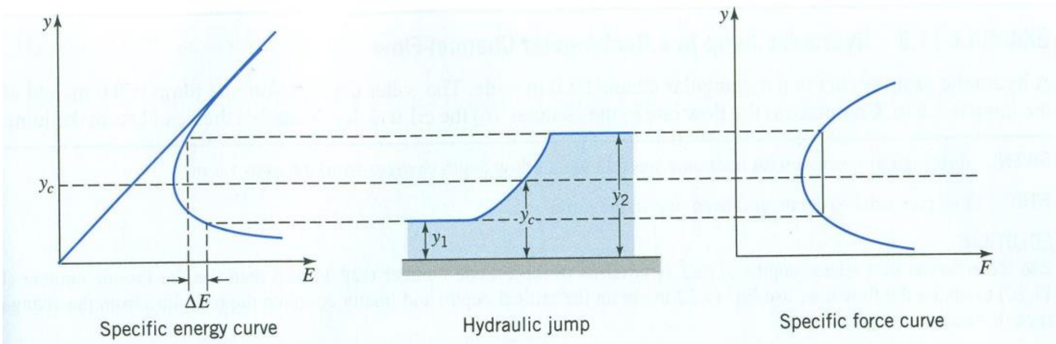


Fig. 11.9 Hydraulic jump.

Le bilan de la conservation de la quantité de mouvement à travers le ressaut hydraulique permet d'avoir la relation suivante :

$$\frac{Q_1^2}{g \cdot A_1} + A_1\, y_1/2 = \frac{Q_2^2}{g \cdot A_2} + A_2\, y_2/2 \qquad (1)$$

où $g = 9.81 m/s^2$ est l'accélération gravitationnelle, et Q_1, Q_2, A_1 et A_2 correspondent respectivement aux débits volumiques et aux sections d'écoulement en amont et en aval du ressaut.

Pour un écoulement à travers un canal de section rectangulaire, le nombre de Froude est exprimé en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement $\langle V \rangle$ et de la largeur D du canal par la relation suivante : $Fr = \dfrac{\langle V \rangle}{\sqrt{g \cdot D}}$.

a) À partir de la relation (1), démontrez que le rapport entre les hauteurs d'eau en aval et en amont du ressaut peut s'écrire comme suit : $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2}\right)$. **(10 points)**

b) Sous quelle condition (en terme du nombre de Froude) le ressaut hydraulique a lieu? **(4 points)**

c) Calculez le débit d'eau $Q\left(m^3/s\right)$ à travers le canal. **(6 points)**

ANNEXES

1. Équation de continuité:

Cartesian coordinates (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{(B.4-1)}$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{(B.4-2)}$$

Spherical coordinates (r, θ, φ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad \text{(B.4-3)}$$

2. Composantes de l'équation de Navier-Stokes:

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}]$$

Cartesian coordinates (x, y, z):

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right] + \rho g_x \qquad \text{(B.6-1)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right] + \rho g_y \qquad \text{(B.6-2)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \qquad \text{(B.6-3)}$$

3. Bilan macroscopique de la quantité de mouvement:

$$\frac{dP_{tot}}{dt} = -\Delta\left(\frac{\langle \overline{v}^2\rangle}{\langle \overline{v}\rangle}\omega + pS\right)\underline{u} + \underline{F}_{s\to f} + m_{tot}\,\underline{g}$$

où ω est le débit massique, S est la section de la conduite, $\underline{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la section transversale de la conduite. Le terme $F_{s\to f}$ correspond à la force de friction exercée par la paroi sur le fluide en écoulement.

4. Bilan macroscopique de l'énergie mécanique (Équation de Bernouilli):

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{\langle \overline{v}^3\rangle}{\langle \overline{v}\rangle}\right) + g\Delta h + \int_1^2 \frac{1}{\rho}dp = \hat{W}_m - \hat{E}_v$$

où $\hat{W}_m$ est le travail par unité de masse effectué sur le fluide. Dans le cas d'un écoulement en régime turbulent, le terme $\hat{E}_v = \frac{1}{2}\langle v\rangle^2 \frac{L}{R_h} f$ correspond aux pertes d'énergie par dissipation visqueuse (par unité de masse) le long des conduites rectilignes de section constante ($R_h = D/4$ est le rayon hydraulique de la conduite cylindrique). À travers les singularités, $\hat{E}_v = \frac{1}{2}\langle \overline{v}\rangle^2 e_v$ où e_v est un facteur de perte par friction :

- Coudes 90°: $e_{v,90^\circ} = 0.5$.
- Coudes 45°: $e_{v,45^\circ} = 0.3$.
- Contraction brusque: $e_v = 0.45(1-\beta)$ où $\beta = (S_{petite} / S_{grande})$.
- Expansion brusque: $e_v = (\beta - 1)^2$ ou $e_v = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2$.

5. **Diagramme de Moody:**

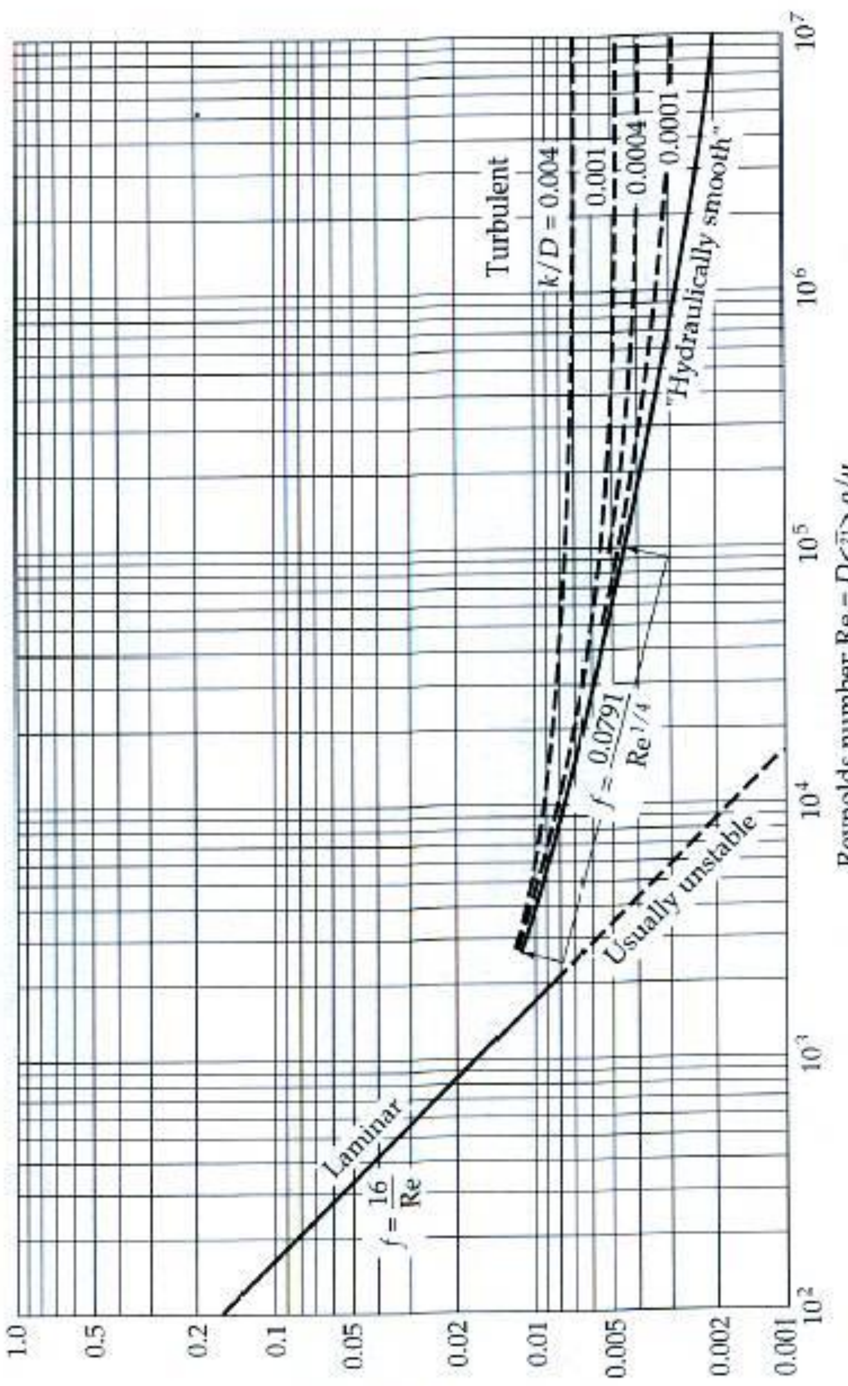


Fig. 6.2-2. Friction factor for tube flow (see definition of f in Eqs. 6.1-2 and 6.1-3. [Curves of L. F. Moody, *Trans. ASME*, **66**, 671–684 (1944) as presented in W. L. McCabe and J. C. Smith, *Unit Operations of Chemical Engineering*, McGraw-Hill, New York (1954).]