ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION DE NOVEMBRE 2011

Toute documentation permise Calculatrices : modèles autorisés seulement Durée de l’examen : 3 heures

04-MB-1 MATHÉMATIQUES

Question 1 (20 points). Trouver la solution des équations différentielles simultanées suivantes à l’aide des transformées de Laplace :

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t$$

avec les conditions initiales : $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

Question 2 (20 points). Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice ci-dessous à l’aide de ce dernier (12 points). Puis trouver un ensemble de vecteurs propres associé à ces valeurs propres (8 points).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 3 (20 points). Problèmes avec les séries.

a) (8 points) Trouver la valeur exacte de la somme de la série suivante : $3 + 3 + \frac{3}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$

b) (8 points) Trouver la nature de la série suivante, son rayon de convergence et sa somme :

$$y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \cdots$$

c) (4 points) Trouver le terme général de la série suivante et sa somme : $1 - \frac{100}{2!} + \frac{10000}{4!} + \cdots$

Question 4 (20 points). Trouver les valeurs max et min de la fonction $x^2 + y^2 + z^2$ sujette aux contraintes suivantes :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{et} \quad z = x + y .$$

Question 5 (20 points). Montrer que la surface $x^2 - 2yz + y^2 = 4$ est perpendiculaire à n’importe quel membre de la famille des surfaces $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ au point d’intersection (1, -1, 2).