ORDRE DES INGÉNIEURS DU QUÉBEC

SESSION MAI 2023

Examen à livre ouvert
Calculatrice : modèle autorisé seulement
Durée : 3 heures

20-MB-A1 MATHÉMATIQUES

Question 1. (10+5+15=30 points)

Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calculer la matrice inverse A^{-1} avec la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

b) Déterminer les valeurs propres de A.

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.

Question 2. (10+10+10=30 points)

a) Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle

$$2y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0.$$

b) Déterminer la forme générale de la solution de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0,$$

sachant que $y_1(x) = x^2$ est solution.

c) Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode des séries entières (séries de puissances).
$y'(x) + 2xy(x) = 0.$

Question 3. (10+10=20 points)

a) Les séries suivantes sont-elles convergentes (justifier les réponses) ?
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n+2^n}.$

b) Déterminer le rayon de convergence des séries entières (séries de puissances) suivantes (justifier).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2^n}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}.$$

Question 4. (10+10=20 points)

a) Déterminer la longueur de la courbe $r(t) = (4\cos t,\ 4\sin t,\ 4t)$ de $(4,0,0)$ à $(4,0,10\pi)$.

b) Démontrer les propriétés suivantes en dimension 3, où f est une fonction scalaire et $\mathbf{v}$ est une fonction vectorielle :
div curl $\mathbf{v} = 0$,
curl grad $f = 0$,
$\text{curl}(f\mathbf{v}) = \text{grad}\, f \times \mathbf{v} + f\,\text{curl}\,\mathbf{v}$.